DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/24

Cursos: LEIC-A

TESTE 2 (VERSÃO B)

30 DE NOVEMBRO DE 2023, 19H

1. Considere o campo vectorial

$$F(x,y,z) \;=\; \left(x^2+y^2,\; y^2+z^2\;, z^2+x^2\right)\;.$$

(a) (2 val.) Calcule $\operatorname{rot} F$.
Resolução:

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & z^2+x^2 \end{vmatrix} = (-2z,\; -2x,\; -2y)$$

(b) (3 val.) Calcule a divergência do campo vectorial

$$G(x,y,z) \;=\; F(x,y,z) \;+\; \operatorname{rot} F(x,y,z)$$

Resolução:

$$\operatorname{div} G(x,y,z) \;=\; \operatorname{div} F(x,y,z) \;+\; \underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)(x,y,z)}_{=0} = 2x+2y+2z$$

2. Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z)\;:\; z = 1-x\;\;, x^2+y^2<1\right\}$$

(a) (1 val.) Escreva uma parametrização para S.
Resolução:

Dado que a superfície é a porção do plano $z = 1-x$ que se encontra no interior do cilindro $x^2+y^2=1$,

$$g(x,y) = (x,y,1-x) \quad , \quad D = \left\{(x,y)\;,\; x^2+y^2<1\right\}$$

(b) (2 val.) Calcule um vector unitário normal à superfície num ponto arbitrário da mesma.
Resolução:

Um vector normal a S num ponto $(a, b, c) \in S$ é dado por

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 0, 1)$$

Tem-se então que um vector normal unitário a um ponto arbitrário de S é

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1, 0, 1\big)$$

(c) (2 val.) Calcule a área de S

Resolução:

Usando as alíneas anteriores

$$\text{Área}(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| dx\, dy = \iint_D \sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2}\,\text{Área}(D) = \sqrt{2}\pi$$

3. Seja F o campo vectorial dado por

$$F(x, y, z) = (3xy + \operatorname{sen}(y^2 + z^2)\,,\ xz\,,\ 3yz + \cos(x^2 + y^2))$$

(a) (2 val.) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através da superfície que é a fronteira do sólido

$$V = \Big\{(x, y, z)\ : x^2 + z^2 < y < 2\Big\}$$

na direção da normal exterior a V.

Resolução:

Tendo em conta que:

1º) F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e

$$\operatorname{div} F = \tfrac{\partial}{\partial x}\big(3xy + \operatorname{sen}(y^2 + z^2)\big) + \tfrac{\partial}{\partial y}\big(xz\big) + \tfrac{\partial}{\partial z}\big(3yz + \cos(x^2 + y^2)\big) = 3y + 0 + 3y = 6y;$$

2º) pretende-se calcular o fluxo de F através da fronteira do sólido, ∂V;

3º) sendo ν a normal unitária exterior a V;

podemos usar o teorema da divergência para efectuar esse cálculo:

$$\text{Fluxo}(F, S, \nu) = \iint_{\partial V} F \cdot \nu\, dS = \iiint_V \operatorname{div} F\, dV = \iiint_V 6y\, dx\, dy\, dz$$

Atendendo a que V é a parte do interior de um parabolóide com eixo de rotação Oy limitada pelo plano $y = 2$, podemos usar coordenadas cilíndricas $(x, y, z) = g(\rho, \theta, y)$, com

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = y \\ z = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{com } 0 < \rho < \sqrt{2}\,,\ \ 0 < \theta < 2\pi \quad \rho^2 < y < 2 \quad \text{e} \quad \big|\det Dg\big| = \rho$$

para calcular o integral triplo. Tem-se assim que

$$\begin{aligned}
\text{Fluxo}(F,S,\nu) &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_{\rho^2}^{2} 6y\rho\,dy\right)d\rho\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}} 3\rho y^2\Big|_{y=\rho^2}^{2} d\rho\right)d\theta \;=\; \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}} 3\rho(4-\rho^4)d\rho\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 3\,d\theta \;\cdot\; \int_0^{\sqrt{2}}(4\rho-\rho^5)d\rho \\
&= 6\pi\left(2\rho^2-\frac{\rho^6}{6}\Big|_{\rho=0}^{\sqrt{2}}\right) \;=\; 6\pi\left(4-\frac{8}{6}\right) \;=\; 16\pi
\end{aligned}$$

(b) (4 val.) Calcule o fluxo de F através da superfície

$$S \;=\; \left\{(x,y,z)\;:\;x^2+z^2=y\;,\;y<2\right\}$$

na direcção da normal a S com segunda componente negativa.

Resolução:

Devemos ter em conta que

1º) S **não é** uma superfície fechada (é, somente, a parte do parabolóide $y = x^2 - z^2$ abaixo do plano $y = 2$).

2º) Dada a formula que define o campo F, o cálculo do fluxo pela definição deverá envolver muitos cálculos.

Iremos então "fechar" a superfície, a fim de podermos usar o teorema da divergência. Considerando a fronteira do sólido V da alínea (a), então

$$\partial V = S \cup S_2$$

sendo S a superfície dada e S_2 a intersecção do interior do parabolóide, $y > x^2 + z^2$, com o plano $y = 2$, que corresponde à "tampa" do sólido V:

$$S_2 = \left\{(x,y,z)\,;\,x^2+z^2<2\,,\;y=2\right\}$$

Ora a normal unitária a S, ν_S, com segunda componente negativa, corresponde à normal exterior a V; por outro lado, vê-se facilmente que a normal unitária a S_1 exterior a V é $\nu_2 = \mathbf{e}_2 = \big(0,1,0\big)$. Assim sendo, e usando o resultado da alínea (a)

$$\iint_S F\cdot\nu_S\,dS \;+\; \iint_{S_2} F\cdot\nu_2\,dS \;=\; \iint_{\partial V} F\cdot\nu\,dS \;=\; 16\pi$$

O fluxo pedido é, pois:

$$\iint_S F\cdot\nu_S\,dS \;=\; 16\pi \;-\; \iint_{S_2} F\cdot\nu_2\,dS.$$

Falta calcular o fluxo de F através da "tampa" S_2, na direção da normal $\nu_2 = (0,1,0)$. Vamos usar a parametrização de S_2:

$$g(x,z) = (x,2,z) \quad \text{definida para} \quad x^2+z^2<2.$$

Note que $\left\|\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial z}\right\| = 1$, isto é, $dS = dx\,dz$ (o que era previsível, dado que S_2 é parte do plano $y = 2$). Em S_2, $F(g(x,z)) \cdot \nu_2 = F(x,2,z) \cdot (0,1,0) = xz$, pelo que

$$\iint_{S_2} F \cdot \nu_2 \, dS \;=\; \iint_{x^2+z^2<2} F(x,2,z) \cdot \nu_2 \left\|\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial z}\right\| dx\,dz \;=\; \iint_{x^2+z^2<2} xz\,dx\,dz$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares

$$(x,z) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad , \quad r \in \left]0, \sqrt{2}\right[\ \ , \quad \theta \in \left]0, 2\pi\right[$$

tem-se que

$$\iint_{S_2} F \cdot \nu_2 \, dS \;=\; \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r^3 \cos\theta \ \mathrm{sen}\,\theta \, d\theta \, dr \;=\; 0.$$

Finalmente

$$\iint_{S} F \cdot \nu_S \, dS \;=\; 16\pi - 0 = 16\pi.$$

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = (1+y^2) f(ty) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) (1 val.) Mostre que este problema tem uma solução única numa vizinhança de $t_0 = 0$.
Resolução:

Para concluir que o PVI admite uma única solução definida numa vizinhança de t_0 vamos aplicar o teorema de Picard. Para tal:

1º) Para $F(t,y) = (1+y^2) f(ty)$ e dado que a função f é por hipótese de classe C^1 em $\mathbb{R}$, resulta que

- F é contínua em $\mathbb{R}^2$;
- $\frac{\partial F}{\partial y}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Assim sendo, F verifica as condições do teorema de Picard no conjunto aberto $D = \mathbb{R}^2$.

2º) $(t_0, y_0) = (0,0)$ pertence a D.

O teorema de Picard permite concluir que o PVI admite uma única solução, $y(t)$, definida para t pertencente a uma vizinhança de 0; isto é, $y :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}$ para algum $\epsilon > 0$.

(b) (3 val.) Suponha que, adicionalmente, f satisfaz $f(x) \geq 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Mostre que o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado.
Resolução:

Pelo teorema de extensão de solução, a solução $y(t)$ obtida na alínea (a) pode ser prolongada a um intervalo máximo de solução $I_{\max} = \left]a, b\right[$, onde $a \leq -\epsilon < 0$ e $b \geq \epsilon > 0$. Queremos mostrar que b é finito. Analizamos agora as possíveis conclusões do teorema de extensão de solução (com b finito, são apenas duas).

1ª) Será que

$$\big(t, y(t)\big) \ \longrightarrow\ \partial D \qquad \text{quando} \qquad t \to b^-?$$

Isto não pode ocorrer, pois $D = \mathbb{R}^2 \ \Rightarrow \partial D = \emptyset$.

2ª) Será que $y(t)$ explode quando $t \to b$?
Para mostrar este facto, vamos usar o teorema da comparação de soluções. Temos que

$$F(t,y) \;=\; (1+y^2)f(ty) \;\geq\; 1+y^2 \tag{1}$$

Resolvemos o problema de valor inicial relativo à função $G(t,y) = 1+y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 1+u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

A solução geral da equação separável

$$\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dt} \;=\; 1$$

é $\operatorname{arctg} u = t + C$. Usando $u(0) = 0$ e explicitando a solução, obtém-se $C = 0$ e

$$u(t) = \operatorname{tg} t.$$

Pelo teorema de comparação de soluções, para $t \in I_{\max}$:

$$y(t) \;\geq\; u(t) \;=\; \operatorname{tg}(t) \qquad \text{para } t \geq 0.$$

Como

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(t) \;=\; \infty$$

a solução explode quando $t \to b$ e $b \leq \frac{\pi}{2}$. Concluimos assim que o intervalo máximo de solução do problema de valor inicial é da forma

$$I_{\max} = \left]a, b\right[\qquad \text{com } \; a < 0 \;\text{ e }\; 0 < b \leq \frac{\pi}{2}.$$