DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/25

Cursos: LEAmb, LEBiom, LEBiol, LEMat, LEQ

TESTE 2 (VERSÃO B)

28 DE NOVEMBRO DE 2024, 19H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

1. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = \big(yz + 2xyz, xz, xy\big)$.

   (a) (2 val.) Calcule a divergência e o rotacional de F.
   Resolução:

Como F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, então $\operatorname{div} F$ e $\operatorname{rot} F$ estão bem definidos em $\mathbb{R}^3$ e

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} F(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\big(yz + 2xyz\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(xz\big) + \frac{\partial}{\partial z}\big(xy\big) \\
&= 2yz + 0 + 0 \quad = \quad 2yz. \\
\operatorname{rot} F(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + 2xyz & xz & xy \end{vmatrix} \\
&= \big(x - x, -y + y + 2xy, z - z - 2xz\big) \quad = \quad \big(0, 2xy, -2xz\big)
\end{aligned}$$

   (b) (2 val.) Mostre que qualquer $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2 satisfaz $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

Sendo $F = (F_1, F_2, F_2)$, onde $F_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$ ou 3) então, para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)(x,y,z) &= \operatorname{div} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\
&= \operatorname{div} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right), \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \quad = \quad 0
\end{aligned}$$

A última igualdade resulta da aplicação do teorema de Schwarz às funções F_1, F_2 e F_3 (que são de classe C^2).

2. Considere a superfície $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y + z = 6 \text{ e } x^2 + y^2 < 4\big\}$

(a) (5 val.) Calcule a massa da superfície, sendo a densidade de massa em cada ponto de S dada por $\sigma(x, y, z) = z - 5$.

Resolução:

Em coordenadas cartesianas, os pontos de S satisfazem a equação do plano $z = 6-3x+2y$ no domínio dado por $x^2 + y^2 < 4$. Assim sendo, uma parametrização de S é

$$g(x, y) = \big(x, y, 6 - 3x + 2y\big) \quad \text{definida em} \quad T = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\big\}.$$

Temos pois

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \big(3, -2, 1\big)$$

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| = \big\|\big(3, -2, 1\big)\big\| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}.$$

A massa de S é:

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \sigma \, dS = \iint_T \sigma\big(g(x, y)\big) \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| dxdy \\ &= \iint_T \big((6 - 3x + 2y) - 5\big) \sqrt{14} \, dxdy = \sqrt{14} \iint_T \big(1 - 3x + 2y\big) dxdy. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, o domínio T representado nas novas coordenadas fica o conjunto $T' = \big\{(r, \theta) : 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < r < 2\big\}$. Desta forma:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{14} \int_0^3 \Big(\int_0^{2\pi} \big(1 - 3r\cos\theta + 2r \operatorname{sen}\theta\big) r \, d\theta \Big) dr \\ &= \sqrt{14} \int_0^2 \big(r\theta - 3r^2 \operatorname{sen}\theta - 2r^2 \cos\theta\big)\Big|_{\theta=0}^{2\pi} dr = \sqrt{14} \int_0^2 2\pi r \, dr \\ &= 2\pi\sqrt{14} \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{2} = 4\pi\sqrt{14}. \end{aligned}$$

(b) (1 val.) Indique a recta normal à superfície em cada $(a, b, c) \in S$.

Resolução:

A superfície S é um conjunto de nível 0 da função $F(x, y, z) = 3x - 2y + z - 6$. Resulta assim que $\nabla F(a, b, c) = (3, -2, 1)$ é um vector normal a S num ponto $(a, b, c) \in S$. Note que este vector normal é constante em S (não depende de $(a, b, c) \in S$), o que resulta de a superfície ser um plano. A equação paramétrica da recta normal a S em qualquer $(a, b, c) \in S$ é

$$(x, y, z) = (a, b, c) + t(3, -2, 1) = (a + 3t, b - 2t, c + t), \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Considere o sólido E definido por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$ e o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x, y, z) = \big(x - x^2, xy + x, xz + z - y^2\big).$$

Utilizando o teorema da divergência:

(a) (3 val.) Calcule o fluxo de F através da fronteira de E orientada pela normal exterior a E.
Resolução:

O sólido é a bola centrada na origem de raio 3,

$$E \;=\; \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + z^2 < 9\big\};$$

∂E é a esfera $x^2+y^2+z^3 = 9$, logo E é um domínio regular. Temos ainda que F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $\operatorname{div} F = \dfrac{\partial}{\partial x}(x - x^2) + \dfrac{\partial}{\partial y}(xy + x) + \dfrac{\partial}{\partial z}(xz + z - y^2) = 1 - 2x + x + x + 1 = 2.$
Pelo teorema da divergência:

$$\iint_{\partial E} F \cdot \nu \, dS \;=\; \iiint_E \operatorname{div} F \, dV \;=\; \iiint_E 2 \, dV \;=\; 2 \operatorname{Vol}_3(D) \;=\; \frac{8}{3}\pi 3^3 = 72\pi$$

(b) (3 val.) Seja $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ e } z > 0\big\}$ orientada pela normal unitária com terceira componente positiva. Calcule o fluxo de F através de S. (Nota: $S \not\subset \partial E$).
Resolução:

Consideramos o sólido (um domínio quase-regular) dado por:

$$E^+ \;=\; \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + z^2 < 9 \wedge z > 0\big\}.$$

Note que E^+ é a metade de E acima do plano $z = 0$. A fronteira de E^+ é $S \cup S_B$, onde a base, S_B, de E^+ é dada por:

$$S_B \;=\; \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 < 9\,,\; z = 0\big\}$$

Sendo a $\operatorname{div} F = 2$ (constante) o resultado da aplicação do teorema da divergência deve ser metade do obtido na alínea (a). De facto:

$$\iint_{\partial E^+} F \cdot \nu \, dS \;=\; \iiint_{E^+} \operatorname{div} F \, dV \;=\; 2 \iiint_{E^+} dV \;=\; 2 \operatorname{Vol}_3(E^+) \;=\; \operatorname{Vol}_3(E) \;=\; 36\pi.$$

Calculamos agora o fluxo de F através de S_B. Em S_B, $\nu = -\mathbf{e}_3 = (0, 0, -1)$ e $F(x, y, z) = (\cdots, \cdots, -y^2)$, pelo que $F \cdot \nu = y^2$. Isto implica que

$$\iint_{S_B} F \cdot \nu \, dS \;=\; \iint_{S_B} y^2 \, dS \;=\; \iint_B y^2 dx dy$$

onde se assumiu a parametrização $g(x, y) = (x, y, 0)$, definida em $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 3\}$.
Utilizando a mudança para coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$:

$$\iint_{S_B} F \cdot \nu \, dS \;=\; \int_0^{\pi} \int_0^3 r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, r \, dr \, d\theta \;=\; \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta \;\cdot\; \int_0^3 r^3 \, dr$$

$$=\; \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(1 - \cos 2\theta\big) d\theta \;\cdot\; \frac{r^4}{4}\bigg|_{r=0}^{3} \;=\; \frac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)\bigg|_{\theta=0}^{2\pi} \cdot \frac{81}{4} = \frac{81}{4}\pi$$

Concluimos que:

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS \;=\; \iint_{\partial E^+} F \cdot \nu \, dS \;-\; \iint_{S_B} F \cdot \nu \, dS \;=\; 36\pi - \frac{81}{4}\pi \;=\; \frac{63}{4}\pi.$$

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} \; = \; 3 + \cos\left(\dfrac{y}{t+2}\right) \\ y(0) = \; 2. \end{cases}$$

(a) (1 val.) Mostre que o problema tem solução única definida numa vizinhança de $t_0 = 0$.

Resolução:

O problema de valor inicial é

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad y(0) = 1 \tag{1}$$

onde $f : D \to \mathbb{R}$ é dada por $f(t, y) = 3 + \cos\left(\dfrac{y}{t+2}\right)$ no domínio

$$D \; = \; \Big\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \neq -2\Big\}.$$

Note que f é da classe C^1 em D e $(0, 2) \in D$. Pelo teorema de Picard, o PVI (1) tem solução única $y :]-\beta, \beta[\to \mathbb{R}$ (para algum $\beta > 0$).

(b) (3 val.) Determine o intervalo máximo de solução do problema.

Resolução:

Para qualquer $(t, y) \in D$, verifica-se que

$$2 \; \leq \; \underbrace{3 + \cos\left(\frac{y}{t+2}\right)}_{f(t,y)} \; \leq \; 4 \tag{2}$$

Por outro lado, consideremos o problema de valor inicial:

$$u' = \alpha, \qquad u(0) = 2 \qquad \text{com } \; \alpha = 2 \; \text{ ou } \; \alpha = 4.$$

A solução geral desta última equação diferencial é $u(t) = \alpha t + c$, com $c \in \mathbb{R}$. Tendo em conta que $u(0) = 2$, obtém-se:

$$u(t) \; = \; \alpha t + 2.$$

Pelo teorema de comparação de soluções (aplicável devido a (2)) e, por outro lado, usando as soluções acima para $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$:

$$2t + 2 \; < \; y(t) \; \leq \; 4t + 2 \qquad \text{para} \quad t \geq 0 \tag{3}$$

$$4t + 2 \; < \; y(t) \; \leq \; 2t + 2 \qquad \text{para} \quad t \leq 0 \; \text{ e } \; t \in D \tag{4}$$

Seja $I_{max} =]a, b[$. Como a solução não pode explodir em tempo finito, quando $t \to b^-$, e o domínio de f inclui todo o semi-plano $t \geq 0$, o teorema de extensão de solução e as estimativas (3) garantem que $b = +\infty$. Por outro lado, como a solução não pode explodir em tempo finito quando $t \to a^+$ mas ∂D é a recta vertical $t = -2$, o teorema de extensão de solução e as estimativas (4) garantem que

$$\big(t, y(t)\big) \; \longrightarrow \; \partial D \quad \text{quando} \;\; t \to -2^+$$

ou seja, o intervalo máximo de solução é

$$I_{max} \; = \;]-2, +\infty[\,.$$