DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/25

Cursos: LEAmb, LEBiom, LEBiol, LEMat, LEQ

Teste 2 (Versão B)

28 de Novembro de 2024, 19h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

1. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = \big(yz + 2xyz, xz, xy\big)$.
   (a) (2 val.) Calcule a divergência e o rotacional de F.
   (b) (2 val.) Mostre que qualquer $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2 satisfaz $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

2. Considere a superfície $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y + z = 6 \text{ e } x^2 + y^2 < 4\big\}$
   (a) (5 val.) Calcule a massa da superfície, sendo a densidade de massa em cada ponto de S dada por $\sigma(x,y,z) = z - 5$.
   (b) (1 val.) Indique a recta normal à superfície em cada $(a,b,c) \in S$.

3. Considere o sólido E definido por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$ e o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x,y,z) = \big(x - x^2, xy + x, xz + z - y^2\big).$$

   Utilizando o teorema da divergência:
   (a) (3 val.) Calcule o fluxo de F através da fronteira de E orientada pela normal exterior a E.
   (b) (3 val.) Seja $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ e } z > 0\big\}$ orientada pela normal unitária com terceira componente positiva. Calcule o fluxo de F através de S. (Nota: $S \not\subset \partial E$).

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 3 + \cos\left(\dfrac{y}{t+2}\right) \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

   (a) (1 val.) Mostre que o problema tem solução única definida numa vizinhança de $t_0 = 0$.
   (b) (3 val.) Determine o intervalo máximo de solução do problema.