

Cálculo Diferencial e Integral III
1º Semestre 2024/25
Cursos: LEAmb, LEBiom, LEBiol, LEMat, LEQ

TESTE 2 (VERSÃO A)

28 DE NOVEMBRO DE 2024, 19H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

1. Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = (yz, xz, xy + xyz)$.
 - (a) (2 val.) Calcule a divergência e o rotacional de F .
 - (b) (2 val.) Mostre que qualquer $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 satisfaz $\text{rot}(\nabla\varphi) = 0$.
2. Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y - z = 10 \text{ e } x^2 + y^2 < 9\}$
 - (a) (5 val.) Calcule a massa da superfície, sendo a densidade de massa em cada ponto de S dada por $\sigma(x, y, z) = z + 9$.
 - (b) (1 val.) Indique a recta normal à superfície em cada $(a, b, c) \in S$.
3. Considere o sólido E definido por $x^2 + y^2 + z^2 < 4$ e o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x, y, z) = (xy + x, y - y^2, yz + z + x^2).$$

Utilizando o teorema da divergência:

- (a) (3 val.) Calcule o fluxo de F através da fronteira de E orientada pela normal exterior a E .
 - (b) (3 val.) Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z > 0\}$ orientada pela normal unitária com terceira componente positiva. Calcule o fluxo de F através de S . (Nota: $S \not\subset \partial E$).
4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2 + \text{sen}\left(\frac{y}{t+3}\right) \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

- (a) (1 val.) Mostre que o problema tem solução única definida numa vizinhança de $t_0 = 0$.
- (b) (3 val.) Determine o intervalo máximo de solução do problema.