Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/24

Cursos: LEIC-A

Teste 1 (Versão A)

19 de Outubro de 2023, 19h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes
(excepto nas perguntas de escolha múltipla).
Duração: 45m.

1. Sendo α um número real arbitrário, considere o problema de valor inicial

$$y' - 2ty = t \quad , \quad y(0) = \alpha$$

   (a) Determine a solução geral da equação.

   Resolução:

   Trata-se de uma equação linear já na forma $y' + a(t)y = b(t)$. O factor integrante é

$$\mu(t) = e^{\int -2t\,dt} = e^{-t^2}$$

   e assim

$$y' - 2ty = t \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{-t^2}y\right)' = te^{-t^2}$$

   Tendo-se então que a solução geral da equação é

$$y(t) = e^{t^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + c\right) = -\frac{1}{2} + ce^{t^2}$$

   com $c \in \mathbb{R}$.

   (b) Calcule a solução do (PVI).

   Resolução:

   Usando a resposta da alínea anterior,

$$y(0) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} + c = \alpha$$

   pelo que $C = \alpha + \dfrac{1}{2}$ e a solução do (PVI) é

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)e^{t^2}$$

   (c) Qual o valor de α para o qual a solução do (PVI) é limitada em $\mathbb{R}^+$?

   Resolução:

   Atendendo a que a função e^{t^2} não é limitada em $\mathbb{R}^+$, o seu coeficiente terá que ser nulo para que a solução do (PVI) seja limitada nesse conjunto. Assim $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

2. Considere a equação diferencial

$$4xy - 2e^{2x} + (2x^2 - 6y)\frac{dy}{dx} = 0$$

(a) Verifique que se trata de uma equação exacta.

Resolução:

Definindo

$$M(x,y) = 4xy - 2e^{2x} \qquad , \qquad N(x,y) = 2x^2 - 6y$$

verifica-se que

- são ambas de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$;
- $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 4x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Conclui-se que (M,N) é um campo gradiente em $\mathbb{R}^2$, ou seja, a equação é exacta em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule a solução geral da equação (pode apresentar o resultado na forma implícita).

Resolução:

Tendo em conta (a), existe $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\, \phi = (M,N)$. Desta forma,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M = 4xy - 2e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x,y) = 2x^2y - e^{2x} + c(y)$$

e também

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2y - e^{2x} + c(y)\right) = 2x^2 - 6y \quad \Leftrightarrow \quad c'(y) = -6y$$

Tem-se então que $c(y) = -3y^2 + c$ e, assim,

$$\phi(x,y) = 2x^2y - e^{2x} - 3y^2 + C\,, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A solução geral da equação exacta na forma implícita é dada por:

$$2x^2y - e^{2x} - 3y^2 = K \qquad , \qquad K \in \mathbb{R}.$$

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine e^{At}

Resolução:

Para calcular e^{At}, começemos por resolver a equação vectorial $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$ para $\mathbf{Y} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = -y \\ y' = -2x + y \end{cases}$$

Substituindo y por $-x'$ na segunda equação

$$-x'' = -2x - x' \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - D - 2)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D+1)(D-2)x = 0$$

pelo que uma base para o espaço de soluções da equação é (por exemplo) $\mathcal{B} = \{e^{-t},\, e^{2t}\}$ e assim

$$x(t) = ae^{-t} + be^{2t} \quad , \quad a,\, b \in \mathbb{R}$$

e então

$$y(t) = -x' = ae^{-t} - 2be^{2t}$$

Tem-se então que a solução da equação é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{-t} + be^{2t} \\ ae^{-t} - 2be^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & -2e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

A matriz

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & -2e^{2t} \end{bmatrix}$$

é uma matriz solução fundamental de $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$. Temos então que:

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & -2e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2e^{-t} + e^{2t} & e^{-t} - e^{2t} \\ 2e^{-t} - 2 & e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

(b) Sendo $\mathbf{Y}(t)$ a solução do (PVI)

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} \quad , \quad \mathbf{Y}(0) = (1, 1)$$

calcule

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{Y}(t)$$

Resolução:

Note-se que a MSF de $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$ calculada na alínea (a) é dada por

$$S(t) = \left[\; e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \; \right].$$

Escrevendo a solução geral de $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$ na forma

$$\mathbf{Y}(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, então usando a condição inicial $\mathbf{Y}(0) = (1, 1)$ obtém-se

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

Assim sendo,

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{Y}(t) = \lim_{t\to+\infty} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nota: o valor inicial $\mathbf{Y}(0) = (1, 1)$ é um vector próprio associado ao valor próprio -1 da matriz A. Note também que a nossa solução, que começou no espaço próprio gerado por $(1, 1)$, irá permanecer nesse espaço para todo o t; ou seja, ela terá que ser da forma:

$$\mathbf{Y}(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Em vez de determinar a solução do PVI, apenas precisa de usar este facto para determinar o limite.

4. Para cada alínea escolha a opção correcta

(a) Uma solução particular da equação

$$y''' + 4y' = 0$$

é

A. $2\cos(2x) + x$ B. $2x + \cos x$ C. $1 + 2\cos(2x)$ D. $\operatorname{sen} x$

Resolução:

$$y''' + 4y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^3 + 4D)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D(D-2i)(D+2i)y = 0$$

Assim, uma base para o espaço das soluções da equação é formada pelas funções 1, $\cos(2x)$ e $\operatorname{sen}(2x)$. Desta forma, a única resposta correcta é $1 + 2\cos(2x)$.

(b) A equação diferencial de menor ordem possível para a qual a função xe^{-x} é solução é

A. $y' + 2y = 0$ B. $y'' + 2y' + y = 0$ C. $y'' - 2y' + y = 0'$ D. $y'' + 4y = 0$

Resolução:

Sendo xe^{-x} solução dessa equação, então e^{-x} também terá que ser. Pelo que o polinómio diferencial associado de menor ordem possível tem a raiz -1 com multiplicidade 2. Assim sendo,

$$P_A(D) = (D+1)^2.$$

A resposta correcta é

$$(D+1)^2 y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' + 2y' + y = 0$$

(c) O intervalo máximo de existência da solução do PVI

$$y' = -\frac{4x}{y} \qquad , \qquad y(0) = -4$$

é

A. $]0, 2[$ B. $]-2, 2[$ C. $[-2, 2]$ D. $\left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$

Resolução:

Para $y \neq 0$ a equação é equivalente a equação separável, cuja solução é:

$$yy' = -4x \quad \Leftrightarrow \quad \int y\, dy = -\int 4t\, dt + c \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = -4t^2 + c$$

com $c \in \mathbb{R}$. Para que $y(0) = -4 < 0$, conclui-se que $c = 4$ e a solução do PVI é

$$y(t) = -\sqrt{4 - t^2}$$

Tendo encontrado a solução na forma explícita, podemos determinar o intervalo máximo de solução como sendo o **maior intervalo aberto onde** $y(t)$ **e** $y'(t)$ estão bem definidas e são contínuas; no nosso caso,

$$I_{\max} =]-2, 2[\,.$$