DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/25

Cursos: LEAmb, LEBiom, LEBiol, LEMat, LEQ

TESTE 1 (VERSÃO B)

17 DE OUTUBRO DE 2024, 19H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

1. Considere o problema de valor inicial

$$y' = 4x^3 e^{y-3} \quad , \quad y(0) = 3$$

(a) (4 val.) Determine explicitamente a solução do PVI.

Resolução:

A equação é equivalente a

$$e^{3-y}\frac{dy}{dx} = 4x^3,$$

que é uma equação separável. Assim sendo, a sua solução geral (na forma implícita) é dada por

$$\int e^{3-y}dy = \int 4x^3 dx + c, \qquad \text{com } c \in \mathbb{R},$$

ou seja:

$$-e^{3-y} = x^4 + c.$$

Calculando c de forma a que $y(0) = 2$, obtém-se $c = -1$ e, como tal

$$3 - y(x) = \log(1 - x^4) \qquad \Leftrightarrow \qquad y(x) = 3 - \log(1 - x^4).$$

(b) (1 val.) Indique o intervalo máximo de existência da solução do PVI.

Resolução:

Basta notar que a função obtida em (a) está definida e é de classe C^1 no conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$1 - x^4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 1.$$

Desta forma, $I_{\max} =]-1, 1[$.

2. Considere a equação diferencial

$$t^2y' - 2ty + h(t) = 0 \quad , \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

em que $h(t)$ é uma função real de variável real.

(a) (4 val.) Determine a solução do PVI no caso em que $h(t) = -2t$, indicando o intervalo máximo de solução.

Resolução:

Para $t \neq 0$, a equação é equivalente a:

$$y' - \frac{2}{t}y \;=\; \frac{2}{t}.$$

Trata-se de uma equação linear, cujo factor integrante pode ser:

$$\mu(t) = e^{\int -\frac{2}{t}dt} = e^{-2\log t} = t^{-2} = \frac{1}{t^2}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(t)$, obtém-se

$$\frac{1}{t^2}y' - \frac{2}{t^3}y = \frac{2}{t^3},$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2}y\right) = \frac{2}{t^3}.$$

Calculando as primitivas obtém-se (para $t \neq 0$):

$$\frac{y(t)}{t^2} = -\frac{1}{t^2} + c \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = ct^2 - 1 \qquad \text{onde } c \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta que $\frac{1}{2} = y(1) = c - 1$, temos que $c = \frac{3}{2}$, pelo que a solução do PVI é

$$y(t) \;=\; \frac{3}{2}\,t^2 \,-\, 1, \qquad \text{definida em } I_{\max} = \mathbb{R}.$$

(b) (1 val.) Sem tentar resolver a equação, determine o intervalo máximo de existência da solução do PVI no caso em que $h(t) = \dfrac{1}{\cos t}$.

Resolução:

A equação dada é equivalente a $y' + a(t)y = b(t)$, com $a(t) = -\frac{2}{t}$ e $b(t) = \frac{2}{t^2\cos t}$ (para $t \neq 0$). Tratando-se de uma equação linear, o intervalo máximo de solução será o maior intervalo contendo $t_0 = 1$ e tal que $a(t)$ e $b(t)$ estão bem definidas e são ambas contínuas. Para tal, é necessário excluir

$$t = 0 \qquad \text{e} \qquad \cos t = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Concluimos que $I_{\max} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) (4 val.) Determine e^{At}

Vamos começar por determinar uma matriz solução fundamental de $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$, resolvendo o sistema equivalente. Assim, sendo $\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{Y} = (x, y, z)$ temos que

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = 2x - z \end{cases}$$

Resolvendo a primeira e a segunda equações, obtém-se:

$$x(t) = ae^{-t} \qquad \text{e} \qquad y(t) = be^{-t} \qquad \text{com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Substituindo x na primeira equação, resulta a equação linear de 1ª ordem

$$z' + z = 2ae^{-t},$$

que tem o factor integrante $\mu(t) = e^{\int dt} = e^t$. Assim sendo

$$e^t x' + e^t x = 2a \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(e^t x\right) = 2a \qquad \Leftrightarrow \qquad e^t x = 2at + c$$

ou seja

$$x(t) = 2ate^{-t} + ce^{-t}, \qquad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

A solução geral de $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$ é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{-t} \\ be^{-t} \\ 2ate^{-t} + ce^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 2te^{-t} & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Desta forma, uma matrix solução fundamental associada à equação é

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 2te^{-t} & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2t & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tendo em conta que $S(0) = I$, então $e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = S(t)$.

(b) (1 val.) Calcule a solução de $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}(0) = (\alpha, 0, 0)$, onde α é um número real. Para que valores de α a solução é limitada?

A solução do problema de valor inicial para a equação homogénea, $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$, é:

$$\mathbf{Y}(t) \;=\; e^{At}\,\mathbf{Y}(0) \;=\; e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;=\; e^{-t} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 2\alpha t \end{bmatrix} \;=\; \alpha e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix}$$

Dado que a função e^{-t} não é limitada em $\mathbb{R}$, a solução do problema de valor inicial é limitada se e só se $\alpha = 0$.

4. Considere a equação diferencial
$$y'' + 9y = g(t)$$
em que $g(t)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

(a) (1 val.) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se
$$y'' + 9y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 9)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D - 3i)(D + 3i)y = 0$$
pelo que a solução geral da equação homogénea é
$$y_G(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t$$

(b) (2 val.) Sendo $g(t) = -9t$, calcule a solução da equação que satisfaz $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

O polinómio aniquilador da função $g(t) = -9t$ é $P_A(D) = D^2$. Aplicando $P_A(D)$ a ambos os membros da equação diferencial $(D - 3i)(D + 3i)y = -9t$, obtém-se:
$$D^2(D - 3i)(D + 3i)y = D^2(-9t) = 0,$$
cuja solução geral é
$$y(t) = \underbrace{c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t}_{y_G(t)} + c_3 + c_4 t.$$
Então $y_P(t) = c_3 + c_4 t$ é o candidato a solução particular. Substituindo na equação $y'' + 9y = -9t$, obtém-se (para qualquer $t \in \mathbb{R}$):
$$9c_3 + 9c_4 t = -9t \qquad \Rightarrow \qquad c_3 = 0 \ \wedge \ c_4 = -1.$$
A solução geral da equação homogénea é
$$y(t) = y_G(t) + y_P(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t - t, \qquad \text{onde} \ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Sendo que $y'(t) = -3c_1 \operatorname{sen} 3t + 3c_2 \cos 3t - 1$, então pelas condições iniciais:
$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ 3c_2 - 1 = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$
Assim sendo, a solução do problema de valor inicial é:
$$y(t) = \cos 3t - t.$$

(c) (2 val.) Determine uma solução particular da equação no caso em que $g(t) = \dfrac{9}{\operatorname{sen}(3t)}$ válida no intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

Uma matriz wronskiana associada à equação $(D - 3i)(D + 3i)y = g(t)$ é
$$W(t) = \begin{bmatrix} \cos 3t & \operatorname{sen} 3t \\ -3 \operatorname{sen} 3t & 3 \cos 3t \end{bmatrix}.$$

A sua inversa é

$$W^{-1}(t) = \frac{1}{3\cos^2 3t + 3\operatorname{sen}^2 3t}\begin{bmatrix} 3\cos 3t & -\operatorname{sen} 3t \\ 3\operatorname{sen} 3t & \cos 3t \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3\cos 3t & -\operatorname{sen} 3t \\ 3\operatorname{sen} 3t & \cos 3t \end{bmatrix}.$$

Pela fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \begin{bmatrix} \cos 3t & \operatorname{sen} 3t \end{bmatrix} + \int \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3\cos 3t & -\operatorname{sen} 3t \\ 3\operatorname{sen} 3t & \cos 3t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{\operatorname{sen}(3t)} \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} \cos 3t & \operatorname{sen} 3t \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{3\cos 3t}{\operatorname{sen} 3t} \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} \cos 3t & \operatorname{sen} 3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3t \\ \log|\operatorname{sen} 3t| \end{bmatrix} \\ &= -3t\cos(3t) + \operatorname{sen}(3t)\log(\operatorname{sen} 3t). \end{aligned}$$

Note que para qualquer $t \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, tem-se que $\operatorname{sen} 3t > 0$, pelo que $\log|\operatorname{sen} 3t| = \log(\operatorname{sen} 3t)$.