

Cálculo Diferencial e Integral III
1º Semestre 2024/25
Cursos: LEAmb, LEBiom, LEBiol, LEMat, LEQ

TESTE 1 (VERSÃO A)

17 DE OUTUBRO DE 2024, 19H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

1. Considere o problema de valor inicial

$$y' = 3x^2 e^{2-y} \quad , \quad y(0) = 2$$

- (a) (4 val.) Determine explicitamente a solução do PVI.
(b) (1 val.) Indique o intervalo máximo de existência da solução do PVI.

2. Considere a equação diferencial

$$t^2 y' - ty + g(t) = 0 \quad , \quad y(1) = 0$$

em que $g(t)$ é uma função real de variável real.

- (a) (4 val.) Determine a solução do PVI no caso em que $g(t) = 2$, indicando o intervalo máximo de solução.
(b) (1 val.) Sem tentar resolver a equação, determine o intervalo máximo de existência da solução do PVI no caso em que $g(t) = \frac{1}{\sin t}$.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) (4 val.) Determine e^{At}
(b) (1 val.) Calcule a solução de $Y' = AY$, $Y(0) = (0, 0, \alpha)$, onde α é um número real. Para que valores de α a solução é limitada?

4. Considere a equação diferencial

$$y'' + 4y = f(t)$$

em que $f(t)$ é uma função contínua em \mathbb{R} .

- (a) (1 val.) Determine a solução geral da equação homogénea associada.
(b) (2 val.) Sendo $f(t) = 4t$ calcule a solução da equação que satisfaz $y(0) = y'(0) = 1$.
(c) (2 val.) Determine uma solução particular da equação no caso em que $f(t) = \frac{4}{\cos(2t)}$ válida no intervalo $\left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$.