

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Resolvidos nº 9 Teorema de Stokes, Potenciais Vectoriais

1. Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y^2, x, z^2)$$

e a superfície S , constituída pela parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 0$, considerando a normal unitária em cada ponto de S , $\vec{\nu}$, com terceira componente positiva. Calcule o trabalho de F ao longo do bordo de S (com sentido compatível com a orientação de S) utilizando:

- (a) A definição de trabalho de F ao longo de um caminho.
(b) O teorema de Stokes.

Resolução:

- (a) Vamos calcular o trabalho de F ao longo do bordo de S (que é um integral de linha de 2º tipo). O bordo de S , ∂S , é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano $z = 0$; para ser compatível com $\vec{\nu}$, deve ter o sentido positivo quando vista de cima. A curva ∂S pode então parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, pelo que:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + \cos^2 t) dt = \pi. \end{aligned}$$

- (b) Pelo teorema de Stokes

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} dS$$

sendo C o bordo de S com orientação compatível com a escolha de $\vec{\nu}$.

Vamos então calcular o integral de superfície. S pode ser parametrizada por $g(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$ no domínio $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Assim

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = (2x, 2y, 1)$$

Dado que a terceira componente deste vector é positiva (está de acordo com a indicação dada no enunciado) vamos usar este vector como a normal, no cálculo do fluxo de $\text{rot } F$ através de S . Por outro lado

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - 2y)$$

Assim

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \iint_D \text{rot } F(g(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D (0, 0, 1 - 2y) \cdot (2x, 2y, 1) \, dA = \iint_D (1 - 2y) \, dA \end{aligned}$$

Mudando para coordenadas polares

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - 2\rho \sin \theta) \rho \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho - 2\rho^2 \sin \theta) \, d\theta \, d\rho = \int_0^1 2\pi \rho \, d\rho = \pi \end{aligned}$$

2. Usando o teorema de Stokes, calcule

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS$$

nos casos que se seguem.

(a) S o hemisfério superior (isto é, $z > 0$) da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, em que se considera a normal ν com terceira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (y, -x, yx^3).$$

(b) S é a parte do plano $x + z = 1$ no interior do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, em que a normal $\vec{\nu}$ tem terceira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (x, -z, y).$$

(c) S é formada pelo topo e pelos quatro lados (não inclui a base) do cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, em que $\vec{\nu}$ é a normal unitária exterior ao cubo e

$$F(x, y, z) = (xyz, xy, x^2yz)$$

Resolução:

(a) Dado que estamos nas condições do teorema de Stokes, pois F é de classe C^1 em \mathbb{R}^3 e S é uma superfície orientável, podemos utilizar este teorema.

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS = \oint_{\gamma} F \cdot d\gamma$$

sendo $\gamma = \partial S$ o bordo de S , orientado de forma compatível com a normal indicada. O caminho γ é a intersecção da esfera com o plano $z = 0$, ou seja, $x^2 + y^2 = 4$ percorrida em sentido directo (quando vista de cima); como tal, pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sendo $F(x, y, z) = (y, -x, yx^3)$, resulta pois que:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma \\ &= \oint_{\gamma} (y, -x, yx^3) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \sin t, -2 \cos t, 16 \sin t \cos^3 t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4 \sin^2 t - 4 \cos^2 t) \, dt = -8\pi \end{aligned}$$

(b) Para determinar o bordo de S , calculamos a intersecção da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + z = 1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Projectando ∂S no plano xy , obtém-se a circunferência $x(\theta) = \cos \theta$, $y(\theta) = \sin \theta$, onde $\theta \in [0, 2\pi]$. Da equação do plano (que contém S e ∂S) $z = 1 - x$, pelo que a parametrização do bordo é:

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos \theta \\ y(\theta) = \sin \theta \\ z(\theta) = 1 - \cos \theta \end{cases} \quad \text{para } \theta \in [0, 2\pi].$$

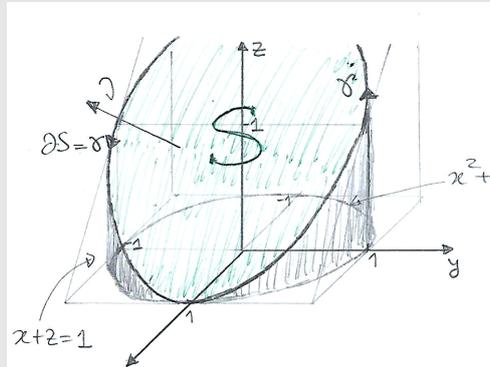


Figura 1: S é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 < 1$ com o plano $x + z = 1$ e $\partial S = \gamma$ é uma elipse.

Temos então que o bordo tem a parametrização

$$\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1 - \cos \theta), \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi].$$

Note que S é orientável e o seu bordo, γ , tem sentido compatível com a normal dada. Além disso, $F(x, y, z) = (x, -z, y)$ é de classe C^1 em \mathbb{R}^3 . Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \oint_{\gamma} F \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos \theta, \cos \theta - 1, \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, \sin \theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta - \cos \theta + \sin^2 \theta) \, d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin 2\theta \, d\theta}_0 + \int_0^{2\pi} d\theta + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta}_0 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

(c) A superfície S é constituída por todas as faces do cubo, excepto a que está contida no plano $z = -1$. O seu bordo, ∂S , é formado por todas as arestas do cubo que estão contidas no plano $z = -1$, sendo percorridas no sentido indicado na figura abaixo (e que é compatível com a orientação de S).

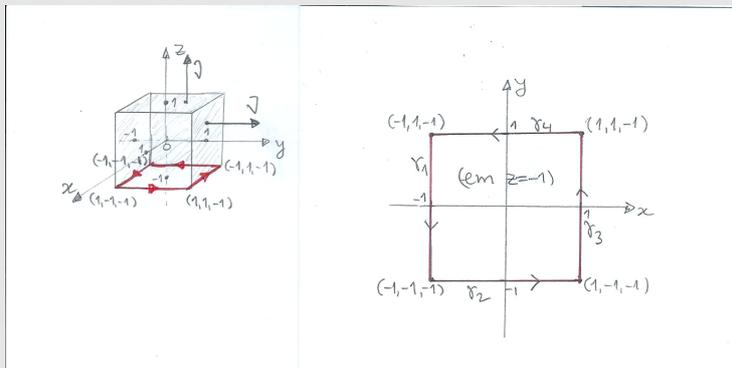


Figura 2: S e o bordo de S .

sendo $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ o bordo de S orientado de forma compatível com a normal indicada. Desta forma, γ é a concatenação dos segmentos de recta que formam as arestas da parte inferior do cubo, e que são parametrizadas por:

$$\gamma_1(t) = (-1, -t, -1) \quad \text{com } t \in [-1, 1];$$

$$\gamma_2(t) = (t, -1, -1) \quad \text{com } t \in [-1, 1];$$

$$\gamma_3(t) = (1, t, -1) \quad \text{com } t \in [-1, 1];$$

$$\gamma_4(t) = (-t, 1, -1) \quad \text{com } t \in [-1, 1].$$

Sendo $F(x, y, z) = (xyz, xy, x^2yz)$ de classe C^1 em \mathbb{R}^3 e S uma superfície orientável cujo bordo é uma curva de Jordan, resulta do teorema de Stokes que:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma \\ &= \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} F \cdot d\gamma \\ &= \int_{-1}^1 (-t, t, t) \cdot (0, -1, 0) \, dt + \int_{-1}^1 (t, -t, t^2) \cdot (1, 0, 0) \, dt \\ &\quad + \int_{-1}^1 (-t, t, -t) \cdot (0, 1, 0) \, dt + \int_{-1}^1 (t, -t, -t^2) \cdot (-1, 0, 0) \, dt \\ &= \int_{-1}^1 \underbrace{(-t + t + t - t)}_0 \, dt = 0 \end{aligned}$$

3. Utilizando o teorema de Stokes, transforme o integral $\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS$ num integral de linha

(trabalho de F ao longo de um caminho) e calcule-o, sendo:

- (a) S a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $y \geq 0$, $\vec{\nu}$ a normal com segunda componente positiva e

$$F(x, y, z) = (y, x, x^2)$$

- (b) S a superfície

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$\vec{\nu}$ a normal com componente em x positiva e

$$F(x, y, z) = (0, x, 0)$$

Resolução:

- (a) Pelo teorema de Stokes

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS = \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

em que ∂S é o bordo da superfície S orientado de forma compatível com a escolha da normal. Neste caso, ∂S é a interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano $y = 0$, ou seja, é a curva $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, com o sentido directo quando vista do ponto $(0, 2, 0)$.

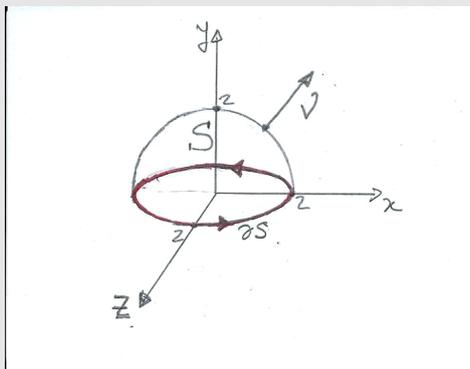


Figura 3: S e o bordo de S .

Assim (ver figura) uma parametrização de ∂S é

$$\gamma(\theta) = (2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Sendo $F(x, y, z) = (y, x, x^2)$, temos então:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} (0, 2 \cos \theta, 4 \cos^2 \theta) \cdot (-2 \sin \theta, 0, -2 \cos \theta) \, d\theta \\ &= -8 \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \, d\theta = 0 \end{aligned}$$

(b) Pelo teorema de Stokes

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS = \oint_{\partial S} F \cdot dr$$

em que C é o bordo da superfície S orientada de forma compatível com a escolha da normal. S é a parte da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ com $x > 0$, $y > 0$ e $0 < z < 1$:

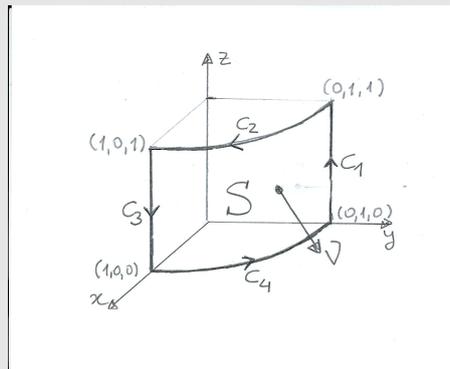


Figura 4: S e o bordo de S .

Neste caso, o bordo de S é uma curva seccionalmente regular constituída por 4 caminhos regulares, para os quais vamos usar as parametrizações:

$$g_1(z) = (0, 1, z), \quad z \in [0, 1] \quad (\text{de } C_1);$$

$$g_2(t) = (\cos t, \sin t, 1), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (\text{de } -C_2);$$

$$g_3(z) = (1, 0, z), \quad z \in [0, 1] \quad (\text{de } -C_3);$$

$$g_4(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (\text{de } C_4).$$

Para o campo vectorial $F(x, y, z) = (0, x, 0)$, temos que

$$\int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \int_{\partial S} x \, dy$$

Desta forma, e calculando os integrais de linha de F ao longo dos caminhos C_i , $i = 1, 2, 3, 4$, que

verificam $\partial S = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$:

$$\int_{C_1} x dy = \int_0^1 0 dz = 0$$

$$\int_{C_3} x dy = -\int_0^1 0 dz = 0$$

$$\int_{C_2} x dy = -\int_0^{\pi/2} \cos t (\sin t)' dt = -\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

$$\int_{C_4} x dy = \int_0^{\pi/2} \cos t (\sin t)' dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = -\int_{C_2} x dy$$

Em conclusão, e tendo em conta que os integrais ao longo de C_2 e C_4 cancelam:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} dS = \sum_{k=1}^4 \oint_{C_k} F \cdot d\gamma = \sum_{k=1}^4 \int_{C_i} x dy = 0.$$

4. Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_C F \cdot d\mathbf{x}$ onde C é o triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, percorrido no sentido positivo quando visto do ponto $(5, 5, 5)$ e

$$F(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2).$$

Resolução:

Pelo teorema de Stokes temos que

$$\oint_C F \cdot d\mathbf{x} = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} dS$$

sendo S uma superfície cujo bordo é C e $\vec{\nu}$ a normal a S compatível com o sentido indicado para C . Sendo que um vector normal ao plano que contém os três vértices do triângulo é $(1, 1, 1)$, a equação deste plano é

$$(x - 1, y, z) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 1.$$

Consideramos a seguinte parametrização do triângulo:

$$g(x, y) = (x, y, 1 - x - y),$$

com g está definida na projecção do triângulo sobre o plano xy :

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x \right\}$$

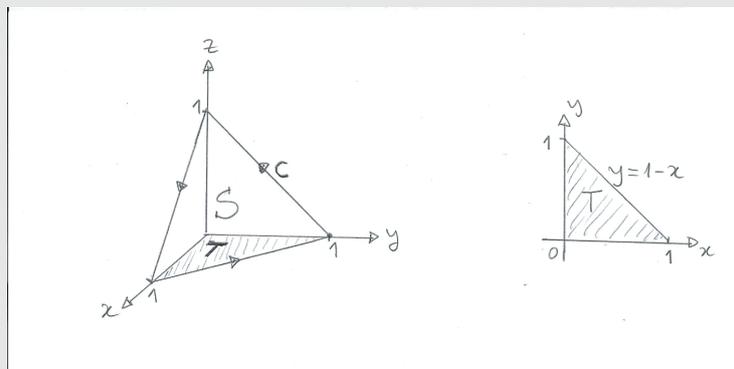


Figura 5: A curva C , uma superfície plana, S , cujo bordo é C , e o domínio de g , T .

A orientação associada a esta parametrização é

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1),$$

sendo compatível com o sentido de C ; note que em caso contrário bastaria tomar $-\vec{n}$ no lugar de \vec{n} , no cálculo que se segue.

Por outro lado:

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y^2 & y + z^2 & z + x^2 \end{vmatrix} = (-2z, -2x, -2y) = -2(z, x, y)$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \text{rot } F \cdot \nu \, dS \\ &= \iint_T -2(1-x-y, x, y) \cdot (1, 1, 1) \, dA \\ &= -2 \iint_T \underbrace{(1-x-y+x+y)}_1 \, dA \\ &= -2 \iint_T dA = -2 \text{Vol}_2(T) = -2\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \end{aligned}$$

5. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial

$$H(x, y, z) = \left(\frac{z}{x^2 + z^2} + x, y, \frac{-x}{x^2 + z^2} + z \right).$$

ao longo da elipse definida por

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = 0 \right\}$$

percorrida no sentido horário quando observada do ponto $(0, 0, 100)$.

Resolução:

Uma superfície S tal que $\partial S = C$ é

$$S = \left\{ (x, y, z) : 2(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, z = 0 \right\}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{z}{x^2+z^2} + x & y & \frac{-x}{x^2+z^2} + z \end{vmatrix} \\ &= \left(0, -\frac{-(x^2+z^2)+2x^2}{(x^2+z^2)^2} + \frac{(x^2+z^2)-2z^2}{(x^2+z^2)^2}, 0 \right) \\ &= \left(0, \frac{z^2-x^2}{(x^2+z^2)^2} + \frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2}, 0 \right) \\ &= (0, 0, 0) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Stokes, o trabalho de H ao longo de C é

$$W = \oint_C H \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \underbrace{\operatorname{rot} H}_{\mathbf{0}} \cdot \nu \, dS = 0.$$

Note que sendo nulo o rotacional de H , o cálculo da normal a S torna-se obviamente desnecessário.

6. Seja S a superfície parametrizada por

$$g(u, v) = (u, v, 2 - u^2 - v^2) \quad \text{com } (u, v) \in B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$$

Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y, 0, x + y)$$

através de S na direção da normal com terceira componente positiva, utilizando

- (a) a definição de fluxo;
 (b) o teorema de Stokes.

Resolução:

(a) O fluxo do rotacional do campo vectorial F é o integral $\iint_S \text{rot } F \cdot \nu \, dS$. Temos que

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 0 & x + y \end{vmatrix} = (1, -1, -1).$$

Por outro lado, uma normal à superfície (com terceira componente positiva) é

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

Assim sendo,

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \nu \, dS = \iint_S (1, -1, -1) \cdot (2u, 2v, 1) \, dS = \iint_B (2u - 2v - 1) \, du \, dv$$

Efectuando a mudança para coordenadas polares $u = \rho \cos \theta$, $v = \rho \sin \theta$, e como B é dado por $(\rho, \theta) \in]0, 1[\times]0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta - 1) \rho \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^1 \left(2\rho^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta}_0 + 2\rho^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta}_0 - \rho \int_0^{2\pi} d\theta \right) d\rho \\ &= \int_0^1 (-2\pi\rho) \, d\rho = -\pi\rho^2 \Big|_0^1 = -\pi. \end{aligned}$$

(b) Para aplicar o teorema de Stokes necessitamos de uma parametrização do bordo de S cujo sentido é compatível com a orientação da superfície. Sendo ∂B a circunferência $u^2 + v^2 = 1$, tomando $u(t) = \cos t$ e $v(t) = \sin t$, ou seja,

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi],$$

e tendo em conta que \vec{n} — a orientação de S segundo a qual se pretende calcular o fluxo — coincide com a normal induzida pela parametrização, então o bordo de S é o caminho

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= g \circ \gamma(t) = g(\cos t, \sin t) \\ &= (\cos t, \sin t, 2 - \cos^2 t - \sin^2 t) = (\cos t, \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS &= \int_{\Gamma} F \cdot d\Gamma \\ &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, 0, \cos t + \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2 t \, dt = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) \, dt = -\pi\end{aligned}$$

7. Considere o campo vectorial

$$G(x, y, z) = (yz, -xz, z^2)$$

e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z, 0 < z < 1\}.$$

Calcule o fluxo do rotacional de G através de S , segundo a normal com terceira componente negativa, usando:

- (a) o teorema de Stokes;
- (b) o teorema da divergência.

Resolução:

(a) A superfície S é dada por $z = x^2 + y^2 - 1$, com

$$0 < z < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x^2 + y^2 - 1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < x^2 + y^2 < 2.$$

Podemos pois parametrizá-la por

$$g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 - 1),$$

com g definida na coroa circular

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}.$$

Um vector normal a S é

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

Como necessitamos da normal a S com terceira componente negativa, tomamos $-\vec{n}$. Em consequência, para obter uma parametrização para o bordo de S que seja compatível com esta orientação precisamos que a fronteira de ∂A , que designamos por γ , seja percorrida no sentido inverso (ver figura).

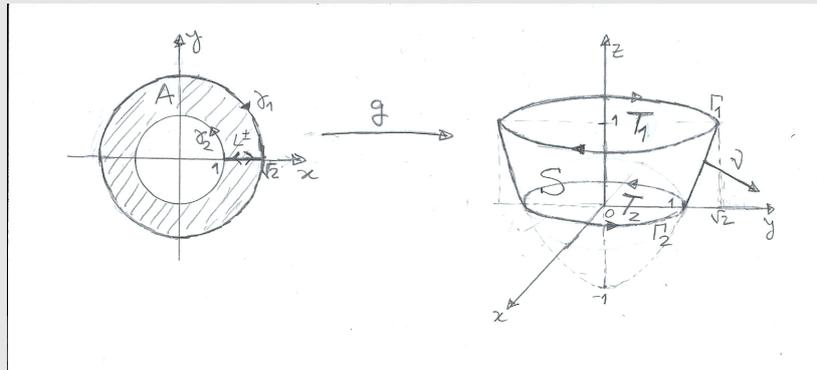


Figura 6: Determinação do bordo da superfície S .

Considerando

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (\sqrt{2} \cos t, -\sqrt{2} \sin t), & t \in [0, 2\pi], \\ \gamma_2(t) &= (\cos t, \sin t), & t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Resulta então que o bordo de S é $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, onde

$$\begin{aligned}\Gamma_1(t) &= g \circ \gamma_1(t) = (\sqrt{2} \cos t, -\sqrt{2} \sin t, 1), & t \in [0, 2\pi], \\ \Gamma_2(t) &= g \circ \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 0), & t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

De acordo com o Teorema de Stokes, e notando que $G = 0$ em Γ_2 , temos:

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} G \cdot \nu \, dS &= \int_{\Gamma} G \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} G \cdot d\mathbf{r} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} G \cdot d\mathbf{r}}_0 \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{2} \sin t, -\sqrt{2} \cos t, 1) \cdot (-\sqrt{2} \sin t, -\sqrt{2} \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \, dt = 4\pi.\end{aligned}$$

(b) Uma vez que o teorema da divergência só se aplica a superfícies que são fronteira de domínios regulares, acrescentamos à superfície S os círculos

$$T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 2\}$$

$$T_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Em linguagem informal, podemos dizer que T_1 é a “tampa” do sólido D e T_2 o seu “fundo” (ver figura da alínea **(a)**), onde

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 + z \text{ e } 0 < z < 1\}.$$

Assim sendo, $\partial D = T_1 \cup T_2 \cup S$. Sendo

$$\text{rot } G = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z^2 \end{vmatrix} = (x, y, -2z) :$$

aplicamos agora o teorema da divergência ao campo vectorial $\text{rot } G$, por forma a verificarmos que o fluxo deste campo através de ∂D é, de facto, nulo:

$$\iint_{\partial D} \text{rot } G \cdot \nu \, dS = \iiint_D \underbrace{\text{div}(\text{rot } G)}_0 \, dV = 0.$$

Por outro lado, como $\partial D = T_1 \cup T_2 \cup S$:

$$\iint_S \text{rot } G \cdot \nu \, dS + \iint_{T_1} \text{rot } G \cdot \nu \, dS + \iint_{T_2} \text{rot } G \cdot \nu \, dS = \iint_{\partial D} \text{rot } G \cdot \nu \, dS = 0.$$

Utilizando

$$g_1(x, y) = (x, y, 1) \quad \text{definida em } D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2\},$$

$$g_2(x, y) = (x, y, 0) \quad \text{definida em } D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\},$$

como parametrizações de T_1 e T_2 , respectivamente, resulta assim que:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } G \cdot \nu \, dS &= - \iint_{T_1} \text{rot } G \cdot \nu \, dS - \iint_{T_2} \text{rot } G \cdot \nu \, dS \\ &= - \iint_{D_1} (x, y, -2) \cdot (0, 0, 1) \, dA - \iint_{D_2} \underbrace{(x, y, 0) \cdot (0, 0, -1)}_0 \, dA \\ &= 2 \iint_{D_1} dA = 2\pi (\sqrt{2})^2 = 4\pi. \end{aligned}$$

8. Verifique que o campo $F(x, y, z) = (-y, z, 3x)$ tem um potencial vectorial e calcule um potencial vectorial para F .

Resolução:

Para que exista tal campo é necessário que $\operatorname{div} F = 0$. Então

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(3x) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^3,$$

pelo que se confirma que existe um campo vectorial $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (dado que as componentes de F são de classe C^1 em \mathbb{R}^3 , sendo \mathbb{R}^3 um conjunto em estrela) tal que

$$\operatorname{rot} G = F. \quad (1)$$

Para determinar $G = (G_1, G_2, G_3)$, determinamos uma solução da equação (1):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} G &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) = (-y, z, 3x). \end{aligned}$$

Assim, vamos calcular funções G_1, G_2 e G_3 tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = -y \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = 3x. \end{cases}$$

Sabemos que existe uma solução deste sistema tal que uma das componentes, G_1, G_2 ou G_3 , é nula. Podemos considerar, por exemplo, $G_1(x, y, z) \equiv 0$, e assim

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = -y \\ \frac{\partial G_3}{\partial x} = -z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} = 3x. \end{cases}$$

Integrando a terceira e a segunda equações em ordem a x obtém-se:

$$G_2(x, y, z) = \int 3x \, dx + A_1(y, z) = \frac{3}{2}x^2 + A_1(y, z)$$

$$G_3(x, y, z) = - \int z \, dx + A_2(y, z) = -xz + A_2(y, z).$$

Substituindo na primeira equação, tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial y}(-xz + A_2(y, z)) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3}{2}x^2 + A_1(y, z)\right) = -y,$$

ou seja,

$$\frac{\partial A_2(y, z)}{\partial y} - \frac{\partial A_1(y, z)}{\partial z} = -y. \quad (2)$$

Precisamos pois de determinar funções $A_1(y, z)$ e $A_2(y, z)$ que verifiquem a equação (2). Dado que temos uma equação e duas incógnitas, existem certamente soluções tais que $A_1(y, z) \equiv 0$ (por exemplo). Desta forma, resta determinar $A_2(y, z)$ tal que

$$\frac{\partial A_2(y, z)}{\partial y} = -y.$$

Primitivando em ordem a y , obtém-se

$$A_2(y, z) = \int (-y) dy + B(z) = -\frac{y^2}{2} + B(z).$$

Podemos ainda tomar $B(z) \equiv 0$. Em conclusão,

$$G_2(x, y, z) = \frac{3}{2}x^2, \quad G_3(x, y, z) = -xz - \frac{y^2}{2},$$

ou seja,

$$G(x, y, z) = \left(0, \frac{3}{2}x^2, -xz - \frac{y^2}{2}\right)$$

Observações. Note que o problema pede *apenas um* potencial vectorial e não *todos* os possíveis potenciais vectoriais, de F .

Neste tipo de problemas, pode ser boa ideia verificar, no final, que $\text{rot } F = G$ (fica como exercício para o aluno).

9. Considere a superfície definida por

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0 \right\}$$

orientada segundo a normal unitária $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ tal que $\nu_3 > 0$.

(a) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de

$$H(x, y, z) = (xz, yz, -z^2 + 1)$$

através de S (no sentido de ν).

(b) Calcule o fluxo de

$$F(x, y, z) = (x + y^3z, y, z)$$

através de S (no sentido de ν).

Resolução:

(a) H está definida e é de classe C^1 em \mathbb{R}^3 (um conjunto em estrela) e a sua divergência é

$$\operatorname{div} H(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-z^2 + 1) = z + z - 2z = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^3.$$

Assim sendo existe (pelo menos um) potencial vectorial $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot} \Phi = H$.

Sendo \mathbb{R}^3 um conjunto em estrela, fazemos o cálculo de um potencial vectorial pela fórmula integral:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= \int_0^1 H(tx, ty, tz) \times (tx, ty, tz) dt \\ &= \int_0^1 \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ t^2xz & t^2yz & -t^2z^2 + 1 \\ tx & ty & tz \end{vmatrix} dt \\ &= \int_0^1 (2t^3yz^2 - ty, -2t^3xz^2 + tx, 0) dt \\ &= (yz^2, -xz^2, 0) \underbrace{\int_0^1 2t^3 dt}_{\parallel 1/2} + (-y, x, 0) \underbrace{\int_0^1 t dt}_{\parallel 1/2} \\ &= \frac{1}{2} (y(z^2 - 1), x(1 - z^2), 0). \end{aligned}$$

Parametrizando o bordo de S , ∂S , por

$$\gamma(t) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

e aplicando o teorema de Stokes, obtemos:

$$\begin{aligned} \iint_S H \cdot \nu \, dS &= \iint_S \operatorname{rot} \Phi \cdot \nu \, dS = \int_{\gamma} \Phi \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \Phi(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \end{aligned}$$

(b) Note que, neste caso, $\operatorname{div} F = 3$ e, por isso, não há potencial vectorial para F . No entanto, e tendo em conta que $\operatorname{div} F$ é constante, é proveitoso usar o teorema da divergência. Seja E o hemisfério norte da bola de raio centrada na origem, isto é, $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1, z > 0\}$. Então

$$\iiint_E \operatorname{div} F \, dV = \iiint_E 3 \, dV = 3 \operatorname{Vol}_3(E) = 3 \left(\frac{2}{3} \pi \right) = 2\pi.$$

Por outro lado, sendo a fronteira de E , $\partial E = S + T$, onde $T = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 < 1\}$, o fluxo através de T é também fácil de calcular:

$$\iint_T F \cdot \nu \, dS = \iint_T (x + y^2 z, y, z) \cdot (0, 0, -1) \, dS = \iint_T -z \, dS = 0$$

(pois $z = 0$ em T).

Finalmente, pelo teorema da divergência:

$$\begin{aligned} 2\pi &= \iiint_E \operatorname{div} F \, dV \\ &= \iint_S F \cdot \nu \, dS + \underbrace{\iint_T F \cdot \nu \, dS}_0 = \iint_S F \cdot \nu \, dS. \end{aligned}$$

10. Seja C um caminho fechado e simples que pertence ao plano $x + y + z = 1$ e é percorrido no sentido directo quando visto do ponto $(0, 0, 10)$. Mostre que o integral de linha

$$\oint_C z dx - 2x dy + 3y dz$$

depende apenas da área da região do plano $x + y + z = 1$ delimitada por C .

Resolução:

Seja S a região interior à curva C no plano

$$x + y + z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 - x - y.$$

Vamos parametrizar S por

$$g(x, y) = (x, y, 1 - x - y), \quad (x, y) \in P \subset \mathbb{R}^2,$$

onde P obtém-se da projecção de S no plano coordenado $z = 0$, ou seja,

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, 1 - x - y) \in S \right\}.$$

A orientação associada a esta parametrização,

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1), \quad \nu = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

é compatível com o sentido prescrito para C . Por outro lado, considerando o campo dado, $F(x, y, z) = (z, -2x, 3y)$:

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & -2x & 3y \end{vmatrix} = (3, 1, -2).$$

Pelo teorema de Stokes

$$\begin{aligned} \oint_C z dx - 2x dy + 3y dz &= \oint_C F \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } F \cdot \nu dS \\ &= \iint_S (3, 1, -2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) dS = \iint_S \frac{2}{\sqrt{3}} dS = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Area}(S). \end{aligned}$$

Comentário: note que se a curva fosse percorrida no sentido contrário ao que foi prescrito, o valor do integral seria $-\frac{2}{\sqrt{3}} \text{Area}(S) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{Vol}_2(S)$. O integral depende apenas do sentido da curva e da área da região do plano delimitada por C ; para além desta dependência, o integral não é função nem da “forma” da curva nem da sua posição no plano.

11. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície e $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 ortogonal a M (ou seja, $H(x) \in T_x^\perp M$ para todo $x \in M$). Mostre que $\text{rot } H$ é um campo vectorial tangente a M em qualquer ponto $p \in M$.

Resolução:

Se $\text{rot } H$ não fosse tangente a M em algum ponto $p \in M$ então teríamos

$$\text{rot } H(p) \cdot \nu(p) > 0$$

para uma certa normal unitária $\nu(\mathbf{x})$ a M , localmente definida. Uma vez que H é de classe C^1 , e portanto $\text{rot } H$ é uma função contínua, existiria um conjunto aberto $U \ni p$ tal que $\text{rot } H(x) \cdot \nu(\mathbf{x}) > 0$ para $x \in U \cap M$. Tomando um caminho simples e fechado γ em $U \cap M$, com sentido compatível com ν , teríamos então, pelo teorema de Stokes

$$\int_{\gamma} H \cdot d\gamma = \int_S \text{rot } H \cdot \nu \, dS > 0,$$

onde $S \subset U \cap M$ é a região de M com bordo γ .

Por outro lado, e uma vez que H é ortogonal a M , temos

$$\oint_{\gamma} H \cdot d\gamma = \int_a^b H(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = 0$$

pois $\gamma'(t)$ é sempre um vector tangente a M para qualquer parametrização $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de um caminho em M . Tendo deduzido uma contradição, concluímos que $\text{rot } H$ é necessariamente tangente à superfície M em todos os pontos da mesma.