

## Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

### Ficha de Problemas Resolvidos nº 9 Teorema de Stokes, Potenciais Vectoriais

1. Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y^2, x, z^2)$$

e a superfície  $S$ , constituída pela parte do parabolóide  $z = 1 - x^2 - y^2$  acima do plano  $z = 0$ , considerando a normal unitária em cada ponto de  $S$ ,  $\vec{\nu}$ , com terceira componente positiva. Calcule o trabalho de  $F$  ao longo do bordo de  $S$  (com sentido compatível com a orientação de  $S$ ) utilizando:

- (a) A definição de trabalho de  $F$  ao longo de um caminho.  
(b) O teorema de Stokes.

**Resolução:**

- (a) Vamos calcular o trabalho de  $F$  ao longo do bordo de  $S$  (que é um integral de linha de 2º tipo). O bordo de  $S$ ,  $\partial S$ , é a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  no plano  $z = 0$ ; para ser compatível com  $\vec{\nu}$ , deve ter o sentido positivo quando vista de cima. A curva  $\partial S$  pode então parametrizada por  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , pelo que:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + \cos^2 t) dt = \pi. \end{aligned}$$

- (b) Pelo teorema de Stokes

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} dS$$

sendo  $C$  o bordo de  $S$  com orientação compatível com a escolha de  $\vec{\nu}$ .

Vamos então calcular o integral de superfície.  $S$  pode ser parametrizada por  $g(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$  no domínio  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ . Assim

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = (2x, 2y, 1)$$

Dado que a terceira componente deste vector é positiva (está de acordo com a indicação dada no enunciado) vamos usar este vector como a normal, no cálculo do fluxo de  $\text{rot } F$  através de  $S$ . Por outro lado

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - 2y)$$

Assim

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \iint_D \text{rot } F(g(x, y)) \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D (0, 0, 1 - 2y) \cdot (2x, 2y, 1) \, dA = \iint_D (1 - 2y) \, dA \end{aligned}$$

Mudando para coordenadas polares

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - 2\rho \sin \theta) \rho \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho - 2\rho^2 \sin \theta) \, d\theta \, d\rho = \int_0^1 2\pi \rho \, d\rho = \pi \end{aligned}$$

2. Usando o teorema de Stokes, calcule

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS$$

nos casos que se seguem.

(a)  $S$  o hemisfério superior (isto é,  $z > 0$ ) da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , em que se considera a normal  $\nu$  com terceira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (y, -x, yx^3).$$

(b)  $S$  é a parte do plano  $x + z = 1$  no interior do cilindro  $x^2 + y^2 \leq 1$ , em que a normal  $\vec{\nu}$  tem terceira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (x, -z, y).$$

(c)  $S$  é formada pelo topo e pelos quatro lados (não inclui a base) do cubo de vértices  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , em que  $\vec{\nu}$  é a normal unitária exterior ao cubo e

$$F(x, y, z) = (xyz, xy, x^2yz)$$

**Resolução:**

(a) Dado que estamos nas condições do teorema de Stokes, pois  $F$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^3$  e  $S$  é uma superfície orientável, podemos utilizar este teorema.

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS = \oint_{\gamma} F \cdot d\gamma$$

sendo  $\gamma = \partial S$  o bordo de  $S$ , orientado de forma compatível com a normal indicada. O caminho  $\gamma$  é a intersecção da esfera com o plano  $z = 0$ , ou seja,  $x^2 + y^2 = 4$  percorrida em sentido directo (quando vista de cima); como tal, pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sendo  $F(x, y, z) = (y, -x, yx^3)$ , resulta pois que:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma \\ &= \oint_{\gamma} (y, -x, yx^3) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \sin t, -2 \cos t, 16 \sin t \cos^3 t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4 \sin^2 t - 4 \cos^2 t) \, dt = -8\pi \end{aligned}$$

(b) Para determinar o bordo de  $S$ , calculamos a intersecção da superfície cilíndrica  $x^2 + y^2 = 1$  com o plano  $x + z = 1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Projectando  $\partial S$  no plano  $xy$ , obtém-se a circunferência  $x(\theta) = \cos \theta$ ,  $y(\theta) = \sin \theta$ , onde  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Da equação do plano (que contém  $S$  e  $\partial S$ )  $z = 1 - x$ , pelo que a parametrização do bordo é:

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos \theta \\ y(\theta) = \sin \theta \\ z(\theta) = 1 - \cos \theta \end{cases} \quad \text{para } \theta \in [0, 2\pi].$$

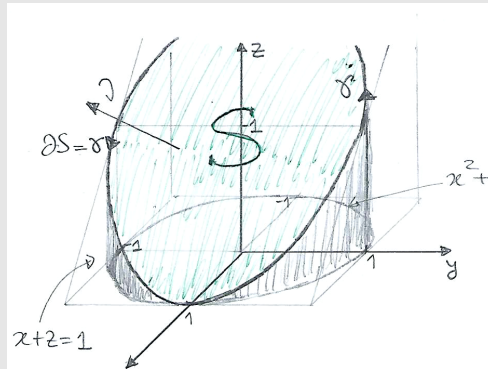


Figura 1:  $S$  é a intersecção do cilindro  $x^2 + y^2 < 1$  com o plano  $x + z = 1$  e  $\partial S = \gamma$  é uma elipse.

Temos então que o bordo tem a parametrização

$$\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1 - \cos \theta), \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi].$$

Note que  $S$  é orientável e o seu bordo,  $\gamma$ , tem sentido compatível com a normal dada. Além disso,  $F(x, y, z) = (x, -z, y)$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^3$ . Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \oint_{\gamma} F \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos \theta, \cos \theta - 1, \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, \sin \theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta - \cos \theta + \sin^2 \theta) \, d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin 2\theta \, d\theta}_0 + \int_0^{2\pi} d\theta + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta}_0 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

(c) A superfície  $S$  é constituída por todas as faces do cubo, excepto a que está contida no plano  $z = -1$ . O seu bordo,  $\partial S$ , é formado por todas as arestas do cubo que estão contidas no plano  $z = -1$ , sendo percorridas no sentido indicado na figura abaixo (e que é compatível com a orientação de  $S$ ).

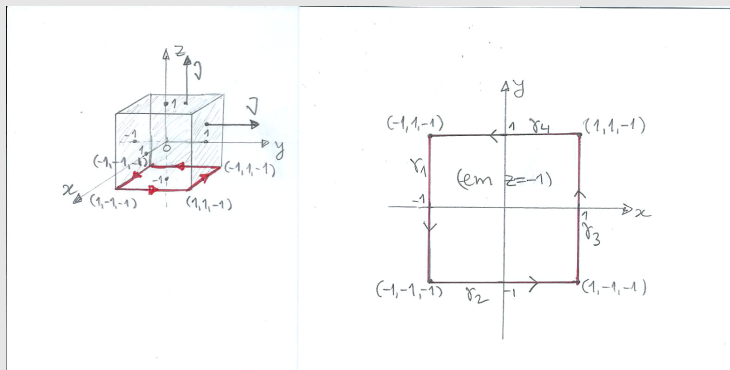


Figura 2:  $S$  e o bordo de  $S$ .

sendo  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$  o bordo de  $S$  orientado de forma compatível com a normal indicada. Desta forma,  $\gamma$  é a concatenação dos segmentos de recta que formam as arestas da parte inferior do cubo, e que são parametrizadas por:

$$\gamma_1(t) = (-1, -t, -1) \quad \text{com } t \in [-1, 1];$$

$$\gamma_2(t) = (t, -1, -1) \quad \text{com } t \in [-1, 1];$$

$$\gamma_3(t) = (1, t, -1) \quad \text{com } t \in [-1, 1];$$

$$\gamma_4(t) = (-t, 1, -1) \quad \text{com } t \in [-1, 1].$$

Sendo  $F(x, y, z) = (xyz, xy, x^2yz)$  de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^3$  e  $S$  uma superfície orientável cujo bordo é uma curva de Jordan, resulta do teorema de Stokes que:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma \\ &= \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} F \cdot d\gamma \\ &= \int_{-1}^1 (-t, t, t) \cdot (0, -1, 0) \, dt + \int_{-1}^1 (t, -t, t^2) \cdot (1, 0, 0) \, dt \\ &\quad + \int_{-1}^1 (-t, t, -t) \cdot (0, 1, 0) \, dt + \int_{-1}^1 (t, -t, -t^2) \cdot (-1, 0, 0) \, dt \\ &= \int_{-1}^1 \underbrace{(-t + t + t - t)}_0 \, dt = 0 \end{aligned}$$

3. Utilizando o teorema de Stokes, transforme o integral  $\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS$  num integral de linha

(trabalho de  $F$  ao longo de um caminho) e calcule-o, sendo:

- (a)  $S$  a superfície  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , com  $y \geq 0$ ,  $\vec{\nu}$  a normal com segunda componente positiva e

$$F(x, y, z) = (y, x, x^2)$$

- (b)  $S$  a superfície

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$\vec{\nu}$  a normal com componente em  $x$  positiva e

$$F(x, y, z) = (0, x, 0)$$

### Resolução:

- (a) Pelo teorema de Stokes

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS = \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

em que  $\partial S$  é o bordo da superfície  $S$  orientado de forma compatível com a escolha da normal. Neste caso,  $\partial S$  é a interseção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  com o plano  $y = 0$ , ou seja, é a curva  $x^2 + z^2 = 4$ ,  $y = 0$ , com o sentido directo quando vista do ponto  $(0, 2, 0)$ .

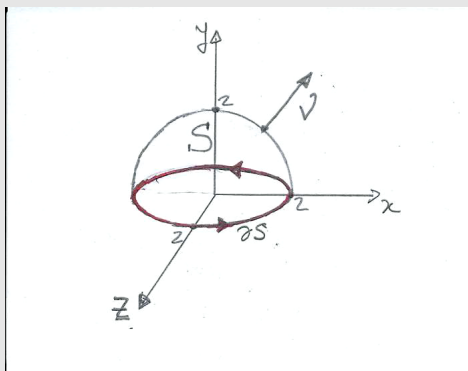


Figura 3:  $S$  e o bordo de  $S$ .

Assim (ver figura) uma parametrização de  $\partial S$  é

$$\gamma(\theta) = (2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Sendo  $F(x, y, z) = (y, x, x^2)$ , temos então:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} (0, 2 \cos \theta, 4 \cos^2 \theta) \cdot (-2 \sin \theta, 0, -2 \cos \theta) \, d\theta \\ &= -8 \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \, d\theta = 0 \end{aligned}$$

(b) Pelo teorema de Stokes

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS = \oint_{\partial S} F \cdot dr$$

em que  $C$  é o bordo da superfície  $S$  orientada de forma compatível com a escolha da normal.  $S$  é a parte da superfície cilíndrica  $x^2 + y^2 = 1$  com  $x > 0$ ,  $y > 0$  e  $0 < z < 1$ :

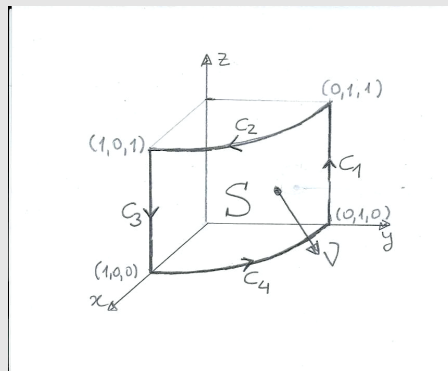


Figura 4:  $S$  e o bordo de  $S$ .

Neste caso, o bordo de  $S$  é uma curva seccionalmente regular constituída por 4 caminhos regulares, para os quais vamos usar as parametrizações:

$$g_1(z) = (0, 1, z), \quad z \in [0, 1] \quad (\text{de } C_1);$$

$$g_2(t) = (\cos t, \sin t, 1), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (\text{de } -C_2);$$

$$g_3(z) = (1, 0, z), \quad z \in [0, 1] \quad (\text{de } -C_3);$$

$$g_4(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (\text{de } C_4).$$

Para o campo vectorial  $F(x, y, z) = (0, x, 0)$ , temos que

$$\int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \int_{\partial S} x \, dy$$

Desta forma, e calculando os integrais de linha de  $F$  ao longo dos caminhos  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , que

verificam  $\partial S = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ :

$$\int_{C_1} x dy = \int_0^1 0 dz = 0$$

$$\int_{C_3} x dy = - \int_0^1 0 dz = 0$$

$$\int_{C_2} x dy = - \int_0^{\pi/2} \cos t (\sin t)' dt = - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

$$\int_{C_4} x dy = \int_0^{\pi/2} \cos t (\sin t)' dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = - \int_{C_2} x dy$$

Em conclusão, e tendo em conta que os integrais ao longo de  $C_2$  e  $C_4$  cancelam:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} dS = \sum_{k=1}^4 \oint_{C_k} F \cdot d\gamma = \sum_{k=1}^4 \int_{C_i} x dy = 0.$$

4. Use o teorema de Stokes para calcular  $\oint_C F \cdot d\mathbf{x}$  onde  $C$  é o triângulo de vértices  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , percorrido no sentido positivo quando visto do ponto  $(5, 5, 5)$  e

$$F(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2).$$

### Resolução:

Pelo teorema de Stokes temos que

$$\oint_C F \cdot d\mathbf{x} = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} dS$$

sendo  $S$  uma superfície cujo bordo é  $C$  e  $\vec{\nu}$  a normal a  $S$  compatível com o sentido indicado para  $C$ . Sendo que um vector normal ao plano que contém os três vértices do triângulo é  $(1, 1, 1)$ , a equação deste plano é

$$(x - 1, y, z) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 1.$$

Consideramos a seguinte parametrização do triângulo:

$$g(x, y) = (x, y, 1 - x - y),$$

com  $g$  está definida na projecção do triângulo sobre o plano  $xy$ :

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x \right\}$$



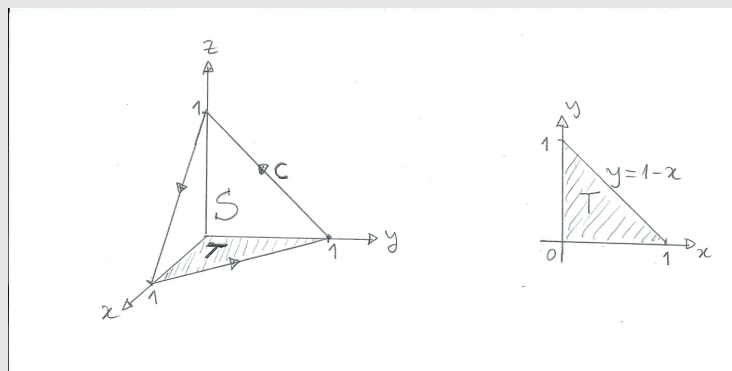


Figura 5: A curva  $C$ , uma superfície plana,  $S$ , cujo bordo é  $C$ , e o domínio de  $g$ ,  $T$ .

A orientação associada a esta parametrização é

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1),$$

sendo compatível com o sentido de  $C$ ; note que em caso contrário bastaria tomar  $-\vec{n}$  no lugar de  $\vec{n}$ , no cálculo que se segue.

Por outro lado:

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y^2 & y + z^2 & z + x^2 \end{vmatrix} = (-2z, -2x, -2y) = -2(z, x, y)$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \text{rot } F \cdot \nu \, dS \\ &= \iint_T -2(1-x-y, x, y) \cdot (1, 1, 1) \, dA \\ &= -2 \iint_T \underbrace{(1-x-y+x+y)}_1 \, dA \\ &= -2 \iint_T dA = -2 \text{Vol}_2(T) = -2\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \end{aligned}$$

5. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial

$$H(x, y, z) = \left( \frac{z}{x^2 + z^2} + x, y, \frac{-x}{x^2 + z^2} + z \right).$$

ao longo da elipse definida por

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = 0 \right\}$$

percorrida no sentido horário quando observada do ponto  $(0, 0, 100)$ .

**Resolução:**

Uma superfície  $S$  tal que  $\partial S = C$  é

$$S = \left\{ (x, y, z) : 2(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, z = 0 \right\}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{z}{x^2+z^2} + x & y & \frac{-x}{x^2+z^2} + z \end{vmatrix} \\ &= \left( 0, -\frac{-(x^2+z^2)+2x^2}{(x^2+z^2)^2} + \frac{(x^2+z^2)-2z^2}{(x^2+z^2)^2}, 0 \right) \\ &= \left( 0, \frac{z^2-x^2}{(x^2+z^2)^2} + \frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2}, 0 \right) \\ &= (0, 0, 0) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Stokes, o trabalho de  $H$  ao longo de  $C$  é

$$W = \oint_C H \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \underbrace{\operatorname{rot} H}_{\mathbf{0}} \cdot \nu \, dS = 0.$$

Note que sendo nulo o rotacional de  $H$ , o cálculo da normal a  $S$  torna-se obviamente desnecessário.

6. Seja  $S$  a superfície parametrizada por

$$g(u, v) = (u, v, 2 - u^2 - v^2) \quad \text{com } (u, v) \in B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$$

Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y, 0, x + y)$$

através de  $S$  na direção da normal com terceira componente positiva, utilizando

- (a) a definição de fluxo;  
 (b) o teorema de Stokes.

**Resolução:**

(a) O fluxo do rotacional do campo vectorial  $F$  é o integral  $\iint_S \text{rot } F \cdot \nu \, dS$ . Temos que

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 0 & x + y \end{vmatrix} = (1, -1, -1).$$

Por outro lado, uma normal à superfície (com terceira componente positiva) é

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

Assim sendo,

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \nu \, dS = \iint_S (1, -1, -1) \cdot (2u, 2v, 1) \, dS = \iint_B (2u - 2v - 1) \, du \, dv$$

Efectuando a mudança para coordenadas polares  $u = \rho \cos \theta$ ,  $v = \rho \sin \theta$ , e como  $B$  é dado por  $(\rho, \theta) \in ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[$ :

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta - 1) \rho \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^1 \left( 2\rho^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta}_0 + 2\rho^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta}_0 - \rho \int_0^{2\pi} d\theta \right) d\rho \\ &= \int_0^1 (-2\pi\rho) \, d\rho = -\pi\rho^2 \Big|_0^1 = -\pi. \end{aligned}$$

(b) Para aplicar o teorema de Stokes necessitamos de uma parametrização do bordo de  $S$  cujo sentido é compatível com a orientação da superfície. Sendo  $\partial B$  a circunferência  $u^2 + v^2 = 1$ , tomando  $u(t) = \cos t$  e  $v(t) = \sin t$ , ou seja,

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi],$$

e tendo em conta que  $\vec{n}$  — a orientação de  $S$  segundo a qual se pretende calcular o fluxo — coincide com a normal induzida pela parametrização, então o bordo de  $S$  é o caminho

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= g \circ \gamma(t) = g(\cos t, \sin t) \\ &= (\cos t, \sin t, 2 - \cos^2 t - \sin^2 t) = (\cos t, \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS &= \int_{\Gamma} F \cdot d\Gamma \\ &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, 0, \cos t + \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2 t \, dt = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) \, dt = -\pi\end{aligned}$$

7. Considere o campo vectorial

$$G(x, y, z) = (yz, -xz, z^2)$$

e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z, 0 < z < 1\}.$$

Calcule o fluxo do rotacional de  $G$  através de  $S$ , segundo a normal com terceira componente negativa, usando:

- (a) o teorema de Stokes;
- (b) o teorema da divergência.

**Resolução:**

(a) A superfície  $S$  é dada por  $z = x^2 + y^2 - 1$ , com

$$0 < z < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x^2 + y^2 - 1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < x^2 + y^2 < 2.$$

Podemos pois parametrizá-la por

$$g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 - 1),$$

com  $g$  definida na coroa circular

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}.$$

Um vector normal a  $S$  é

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

Como necessitamos da normal a  $S$  com terceira componente negativa, tomamos  $-\vec{n}$ . Em consequência, para obter uma parametrização para o bordo de  $S$  que seja compatível com esta orientação precisamos que a fronteira de  $\partial A$ , que designamos por  $\gamma$ , seja percorrida no sentido inverso (ver figura).

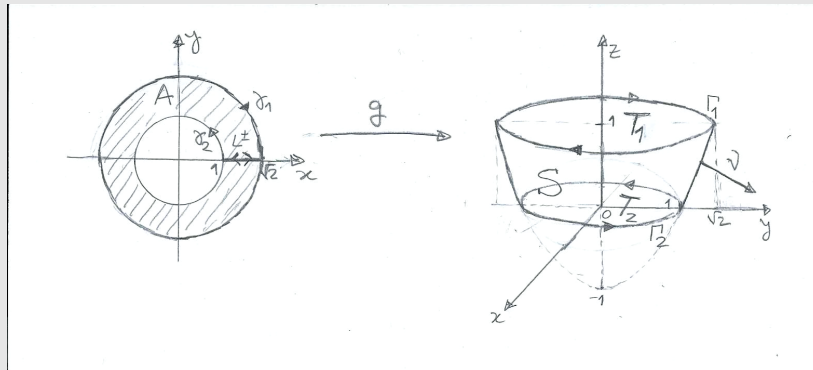


Figura 6: Determinação do bordo da superfície  $S$ .

Considerando

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (\sqrt{2} \cos t, -\sqrt{2} \sin t), & t \in [0, 2\pi], \\ \gamma_2(t) &= (\cos t, \sin t), & t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Resulta então que o bordo de  $S$  é  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , onde

$$\begin{aligned}\Gamma_1(t) &= g \circ \gamma_1(t) = (\sqrt{2} \cos t, -\sqrt{2} \sin t, 1), & t \in [0, 2\pi], \\ \Gamma_2(t) &= g \circ \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 0), & t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

De acordo com o Teorema de Stokes, e notando que  $G = 0$  em  $\Gamma_2$ , temos:

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} G \cdot \nu \, dS &= \int_{\Gamma} G \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} G \cdot d\mathbf{r} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} G \cdot d\mathbf{r}}_0 \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{2} \sin t, -\sqrt{2} \cos t, 1) \cdot (-\sqrt{2} \sin t, -\sqrt{2} \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \, dt = 4\pi.\end{aligned}$$

**(b)** Uma vez que o teorema da divergência só se aplica a superfícies que são fronteira de domínios regulares, acrescentamos à superfície  $S$  os círculos

$$T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 2\}$$

$$T_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Em linguagem informal, podemos dizer que  $T_1$  é a “tampa” do sólido  $D$  e  $T_2$  o seu “fundo” (ver figura da alínea **(a)**), onde

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 + z \text{ e } 0 < z < 1\}.$$

Assim sendo,  $\partial D = T_1 \cup T_2 \cup S$ . Sendo

$$\text{rot } G = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z^2 \end{vmatrix} = (x, y, -2z) :$$

aplicamos agora o teorema da divergência ao campo vectorial  $\text{rot } G$ , por forma a verificarmos que o fluxo deste campo através de  $\partial D$  é, de facto, nulo:

$$\iint_{\partial D} \text{rot } G \cdot \nu \, dS = \iiint_D \underbrace{\text{div}(\text{rot } G)}_0 \, dV = 0.$$

Por outro lado, como  $\partial D = T_1 \cup T_2 \cup S$ :

$$\iint_S \text{rot } G \cdot \nu \, dS + \iint_{T_1} \text{rot } G \cdot \nu \, dS + \iint_{T_2} \text{rot } G \cdot \nu \, dS = \iint_{\partial D} \text{rot } G \cdot \nu \, dS = 0.$$

Utilizando

$$g_1(x, y) = (x, y, 1) \quad \text{definida em } D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2\},$$

$$g_2(x, y) = (x, y, 0) \quad \text{definida em } D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\},$$

como parametrizações de  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente, resulta assim que:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } G \cdot \nu \, dS &= - \iint_{T_1} \text{rot } G \cdot \nu \, dS - \iint_{T_2} \text{rot } G \cdot \nu \, dS \\ &= - \iint_{D_1} (x, y, -2) \cdot (0, 0, 1) \, dA - \iint_{D_2} \underbrace{(x, y, 0) \cdot (0, 0, -1)}_0 \, dA \\ &= 2 \iint_{D_1} dA = 2\pi (\sqrt{2})^2 = 4\pi. \end{aligned}$$

8. Verifique que o campo  $F(x, y, z) = (-y, z, 3x)$  tem um potencial vectorial e calcule um potencial vectorial para  $F$ .

**Resolução:**

Para que exista tal campo é necessário que  $\operatorname{div} F = 0$ . Então

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(3x) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^3,$$

pelo que se confirma que existe um campo vectorial  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (dado que as componentes de  $F$  são de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^3$ , sendo  $\mathbb{R}^3$  um conjunto em estrela) tal que

$$\operatorname{rot} G = F. \quad (1)$$

Para determinar  $G = (G_1, G_2, G_3)$ , determinamos uma solução da equação (1):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} G &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) = (-y, z, 3x). \end{aligned}$$

Assim, vamos calcular funções  $G_1, G_2$  e  $G_3$  tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = -y \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = 3x. \end{cases}$$

Sabemos que existe uma solução deste sistema tal que uma das componentes,  $G_1, G_2$  ou  $G_3$ , é nula. Podemos considerar, por exemplo,  $G_1(x, y, z) \equiv 0$ , e assim

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = -y \\ \frac{\partial G_3}{\partial x} = -z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} = 3x. \end{cases}$$

Integrando a terceira e a segunda equações em ordem a  $x$  obtém-se:

$$G_2(x, y, z) = \int 3x \, dx + A_1(y, z) = \frac{3}{2}x^2 + A_1(y, z)$$

$$G_3(x, y, z) = - \int z \, dx + A_2(y, z) = -xz + A_2(y, z).$$

Substituindo na primeira equação, tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial y}(-xz + A_2(y, z)) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3}{2}x^2 + A_1(y, z)\right) = -y,$$

ou seja,

$$\frac{\partial A_2(y, z)}{\partial y} - \frac{\partial A_1(y, z)}{\partial z} = -y. \quad (2)$$

Precisamos pois de determinar funções  $A_1(y, z)$  e  $A_2(y, z)$  que verifiquem a equação (2). Dado que temos uma equação e duas incógnitas, existem certamente soluções tais que  $A_1(y, z) \equiv 0$  (por exemplo). Desta forma, resta determinar  $A_2(y, z)$  tal que

$$\frac{\partial A_2(y, z)}{\partial y} = -y.$$

Primitivando em ordem a  $y$ , obtém-se

$$A_2(y, z) = \int (-y) dy + B(z) = -\frac{y^2}{2} + B(z).$$

Podemos ainda tomar  $B(z) \equiv 0$ . Em conclusão,

$$G_2(x, y, z) = \frac{3}{2}x^2, \quad G_3(x, y, z) = -xz - \frac{y^2}{2},$$

ou seja,

$$G(x, y, z) = \left(0, \frac{3}{2}x^2, -xz - \frac{y^2}{2}\right)$$

**Observações.** Note que o problema pede *apenas um* potencial vectorial e não *todos* os possíveis potenciais vectoriais, de  $F$ .

Neste tipo de problemas, pode ser boa ideia verificar, no final, que  $\text{rot } F = G$  (fica como exercício para o aluno).



9. Considere a superfície definida por

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0 \right\}$$

orientada segundo a normal unitária  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  tal que  $\nu_3 > 0$ .

(a) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de

$$H(x, y, z) = (xz, yz, -z^2 + 1)$$

através de  $S$  (no sentido de  $\nu$ ).

(b) Calcule o fluxo de

$$F(x, y, z) = (x + y^3z, y, z)$$

através de  $S$  (no sentido de  $\nu$ ).

**Resolução:**

(a)  $H$  está definida e é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^3$  (um conjunto em estrela) e a sua divergência é

$$\operatorname{div} H(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-z^2 + 1) = z + z - 2z = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^3.$$

Assim sendo existe (pelo menos um) potencial vectorial  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\operatorname{rot} \Phi = H$ .

Sendo  $\mathbb{R}^3$  um conjunto em estrela, fazemos o cálculo de um potencial vectorial pela fórmula integral:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= \int_0^1 H(tx, ty, tz) \times (tx, ty, tz) dt \\ &= \int_0^1 \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ t^2xz & t^2yz & -t^2z^2 + 1 \\ tx & ty & tz \end{vmatrix} dt \\ &= \int_0^1 (2t^3yz^2 - ty, -2t^3xz^2 + tx, 0) dt \\ &= (yz^2, -xz^2, 0) \underbrace{\int_0^1 2t^3 dt}_{\parallel 1/2} + (-y, x, 0) \underbrace{\int_0^1 t dt}_{\parallel 1/2} \\ &= \frac{1}{2} (y(z^2 - 1), x(1 - z^2), 0). \end{aligned}$$

Parametrizando o bordo de  $S$ ,  $\partial S$ , por

$$\gamma(t) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

e aplicando o teorema de Stokes, obtemos:

$$\begin{aligned} \iint_S H \cdot \nu \, dS &= \iint_S \operatorname{rot} \Phi \cdot \nu \, dS = \int_{\gamma} \Phi \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \Phi(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \end{aligned}$$

**(b)** Note que, neste caso,  $\operatorname{div} F = 3$  e, por isso, não há potencial vectorial para  $F$ . No entanto, e tendo em conta que  $\operatorname{div} F$  é constante, é proveitoso usar o teorema da divergência. Seja  $E$  o hemisfério norte da bola de raio centrada na origem, isto é,  $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1, z > 0\}$ . Então

$$\iiint_E \operatorname{div} F \, dV = \iiint_E 3 \, dV = 3 \operatorname{Vol}_3(E) = 3 \left( \frac{2}{3} \pi \right) = 2\pi.$$

Por outro lado, sendo a fronteira de  $E$ ,  $\partial E = S + T$ , onde  $T = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 < 1\}$ , o fluxo através de  $T$  é também fácil de calcular:

$$\iint_T F \cdot \nu \, dS = \iint_T (x + y^2 z, y, z) \cdot (0, 0, -1) \, dS = \iint_T -z \, dS = 0$$

(pois  $z = 0$  em  $T$ ).

Finalmente, pelo teorema da divergência:

$$\begin{aligned} 2\pi &= \iiint_E \operatorname{div} F \, dV \\ &= \iint_S F \cdot \nu \, dS + \underbrace{\iint_T F \cdot \nu \, dS}_0 = \iint_S F \cdot \nu \, dS. \end{aligned}$$

10. Seja  $C$  um caminho fechado e simples que pertence ao plano  $x + y + z = 1$  e é percorrido no sentido directo quando visto do ponto  $(0, 0, 10)$ . Mostre que o integral de linha

$$\oint_C z dx - 2x dy + 3y dz$$

depende apenas da área da região do plano  $x + y + z = 1$  delimitada por  $C$ .

**Resolução:**

Seja  $S$  a região interior à curva  $C$  no plano

$$x + y + z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 - x - y.$$

Vamos parametrizar  $S$  por

$$g(x, y) = (x, y, 1 - x - y), \quad (x, y) \in P \subset \mathbb{R}^2,$$

onde  $P$  obtém-se da projecção de  $S$  no plano coordenado  $z = 0$ , ou seja,

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, 1 - x - y) \in S \right\}.$$

A orientação associada a esta parametrização,

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1), \quad \nu = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

é compatível com o sentido prescrito para  $C$ . Por outro lado, considerando o campo dado,  $F(x, y, z) = (z, -2x, 3y)$ :

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & -2x & 3y \end{vmatrix} = (3, 1, -2).$$

Pelo teorema de Stokes

$$\begin{aligned} \oint_C z dx - 2x dy + 3y dz &= \oint_C F \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } F \cdot \nu dS \\ &= \iint_S (3, 1, -2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) dS = \iint_S \frac{2}{\sqrt{3}} dS = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Area}(S). \end{aligned}$$

*Comentário:* note que se a curva fosse percorrida no sentido contrário ao que foi prescrito, o valor do integral seria  $-\frac{2}{\sqrt{3}} \text{Area}(S) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{Vol}_2(S)$ . O integral depende apenas do sentido da curva e da área da região do plano delimitada por  $C$ ; para além desta dependência, o integral não é função nem da “forma” da curva nem da sua posição no plano.

11. Seja  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície e  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vectorial de classe  $C^1$  ortogonal a  $M$  (ou seja,  $H(x) \in T_x^\perp M$  para todo o  $x \in M$ ). Mostre que  $\text{rot } H$  é um campo vectorial tangente a  $M$  em qualquer ponto  $p \in M$ .

**Resolução:**

Se  $\text{rot } H$  não fosse tangente a  $M$  em algum ponto  $p \in M$  então teríamos

$$\text{rot } H(p) \cdot \nu(p) > 0$$

para uma certa normal unitária  $\nu(\mathbf{x})$  a  $M$ , localmente definida. Uma vez que  $H$  é de classe  $C^1$ , e portanto  $\text{rot } H$  é uma função contínua, existiria um conjunto aberto  $U \ni p$  tal que  $\text{rot } H(x) \cdot \nu(\mathbf{x}) > 0$  para  $x \in U \cap M$ . Tomando um caminho simples e fechado  $\gamma$  em  $U \cap M$ , com sentido compatível com  $\nu$ , teríamos então, pelo teorema de Stokes

$$\int_{\gamma} H \cdot d\gamma = \int_S \text{rot } H \cdot \nu \, dS > 0,$$

onde  $S \subset U \cap M$  é a região de  $M$  com bordo  $\gamma$ .

Por outro lado, e uma vez que  $H$  é ortogonal a  $M$ , temos

$$\oint_{\gamma} H \cdot d\gamma = \int_a^b H(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = 0$$

pois  $\gamma'(t)$  é sempre um vector tangente a  $M$  para qualquer parametrização  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  de um caminho em  $M$ . Tendo deduzido uma contradição, concluímos que  $\text{rot } H$  é necessariamente tangente à superfície  $M$  em todos os pontos da mesma.