

## Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

### Ficha de Problemas nº 8 Fluxo e Teorema da Divergência

#### 1 Exercícios Propostos

1. Calcule o fluxo do campo vectorial  $F$  através da superfície  $S$  orientada da forma indicada, sendo:

- (a) Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (0, xz, 3xyz^2)$$

e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x^2 + y^3, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

orientada com a normal unitária cuja terceira componente é positiva.

- (b)  $F(x, y, z) = (yz, xz, 2xy)$  e  $S$  o cone definido por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 < z < 1$$

orientado com a normal  $n$  com terceira componente positiva.

- (c)  $F(x, y, z) = h(r)(x, y, z)$ , em que  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e  $h : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, e  $S$  a superfície esférica de raio igual a um, centro na origem e orientada com a normal  $n$  tal que  $n(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ .

2. Calcule o fluxo do campo vectorial  $F$  através da fronteira da região  $E$  segundo a normal exterior utilizando a definição de fluxo e o teorema da divergência, sendo:

- (a)  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  e  $E$  é a bola unitária  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

- (b)  $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$  e  $E$  é o cilindro sólido  $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ .

3. Use o teorema da divergência para calcular  $\iint_S F \cdot \nu \, dS$  onde

- (a)  $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z^2)$ ,  $S$  a fronteira do cilindro  $x^2 + y^2 \leq 4$  e  $0 \leq z \leq 3$  e  $\nu$  é a normal unitária que aponta para fora o cilindro.

- (b)  $F(x, y, z) = (y^3 e^z, -xy, x \operatorname{arctg} y)$  e  $S$  é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e o plano  $x + y + z = 1$ .
- (c) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de  $F$  através de  $S$ , onde  $F(x, y, z) = (x^3 y, -x^2 y^2, -x^2 y z)$  e  $S$  é a superfície do sólido delimitado pelo hiperbolóide  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  e pelos planos  $z = -2$  e  $z = 2$ .
- (d) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de  $F$  através de  $S$ , onde  $F(x, y, z) = (3x, xz, z^2)$  e  $S$  é a superfície da região delimitada pelo parabolóide  $z = 4 - x^2 - y^2$  e o plano- $xy$ .
- (e) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de  $F$  através de  $S$ , onde  $F(x, y, z) = (x^4, -x^3 z^2, 4xy^2 z)$  e  $S$  é a superfície do sólido constituído pela parte do cilindro  $x^2 + y^2 \leq 1$  limitada pelos planos  $z = x + 2$  e  $z = 0$ .

4. Use o teorema da divergência para calcular  $\iint_S F \cdot n \, dS$  onde

$$F(x, y, z) = \left( z^2 x, \frac{1}{3} y^3 + \operatorname{tg} z, x^2 z + y^2 \right),$$

$S$  é o hemisfério superior da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e  $n$  é a normal unitária a  $S$  orientada para cima.

**Nota:**  $S$  não é uma superfície fechada.

5. Seja  $F = (z \operatorname{arctg} y^2, z^3 \ln(x^2 + 1), z)$ . Determine o fluxo de  $F$  através da parte do parabolóide  $x^2 + y^2 + z = 2$  que está acima do plano  $z = 1$  e está orientada para cima.

**Nota:**  $S$  não é uma superfície fechada.

6. Calcule o volume do conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\}$$

usando o teorema da divergência.

7. Sejam  $S$  e  $E$  nas condições do teorema da divergência e  $e$  o campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

Mostre que

$$\text{Volume } E = \frac{1}{3} \iint_S F \cdot \vec{\nu} \, dS$$

sendo  $\vec{\nu}$  a normal unitária exterior a  $S$ .

8. Demonstre a identidade abaixo, supondo que  $S$  e  $E$  satisfaçam as condições do teorema da divergência e que as funções escalares e as componentes dos campos vectoriais tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

$$\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n \, dS = \iiint_E (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV$$

**Sugestão:** Use o teorema da divergência e o facto de  $\nabla f \cdot \nabla g = \nabla g \cdot \nabla f$ .

9. Sejam  $S$  e  $E$  nas condições do teorema da divergência e  $f$  uma função escalar de classe  $C^2$ , mostre que

$$\iint_S D_{\vec{N}} f \, dS = \iiint_E \Delta f \, dV$$

onde  $D_{\vec{N}} f$  é a derivada de  $f$  na direção da normal a  $S$ ,  $\vec{N}$  e  $\Delta f = \nabla^2 f$  é a laplaciano de  $f$ .

## 2 Soluções

- (a) 0  
(b) 0  
(c)  $4\pi h(1)$
- (a)  $4\pi$    (b)  $\pi/2$
- (a)  $36\pi$    (b)  $-\frac{1}{24}$    (c) 0   (d)  $\frac{136}{3}\pi$    (e)  $\frac{2\pi}{3}$
- $\frac{13}{20}\pi$
- $3\pi/2$
- $\pi/2$