Cálculo Diferencial e Integral III

1^{o} Semestre 2024/2025

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Resolvidos nº 7

Integrais de Superfície e Operadores Diferenciais

1 Exercícios Resolvidos

1. Calcule o integral de superfície de $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+1/4}$, sendo S a porção do paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ acima do plano xOy.

   Resolução:

Começemos por parametrizar a superfície. Dado que a interseção do parabolóide com o plano $z = 0$ é $x^2 + y^2 = 9$, consideraremos a parametrização

$$g(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 9 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

em que $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$. Sendo assim

$$\begin{aligned}
\iint_S f(x,y,z)\, dS &= \iint_T f(x,y) \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| dxdy \\
&= \iint_T \sqrt{x^2+y^2+1/4}\, \left\|(2x, 2y, 1)\right\| dxdy \\
&= \iint_T \sqrt{x^2+y^2+1/4}\, \sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}\, dxdy \\
&= \iint_T 2\sqrt{x^2+y^2+1/4}\, \sqrt{x^2+y^2+1/4}\, dxdy \\
&= 2\iint_T \left(x^2+y^2+\tfrac{1}{4}\right) dxdy
\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares neste último integral em $T \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

em que $0 < \rho < 3$ e $0 < \theta < 2\pi$,

$$\iint_S f\, dS \;=\; 2\int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(\rho^2 + \tfrac{1}{4}\right)\rho d\rho d\theta \;=\; 4\pi\Big(\tfrac{\rho^4}{4} + \tfrac{\rho^2}{8}\Big)\Big|_0^3 \;=\; \frac{171}{2}\pi$$

2. Determine a área da superfície dada por
   (a) A parte inferior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ cortada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
   (b) A superfície $S = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ z \leq 1\}$.
   (c) A fronteira do sólido limitado pelas superfícies $z = 1$, $z = 4$, $x^2 + y^2 = 1$ e $z = x^2 + y^2$.

Resolução:

(a) Sejam

$$\begin{cases} x = r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$

Note-se que na esfera $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$. A intersecção da esfera com o cone é:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad \text{e} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad\Rightarrow\quad z^2 + z^2 = 2 \quad\Leftrightarrow\quad z^2 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad z = 1,$$

pois $z \geq 0$. Logo, se $z < 1$,

$$1 > \sqrt{2}\cos\phi \quad\Leftrightarrow\quad \phi > \pi/4.$$

Para a parte da esfera que está abaixo do cone, temos pois que $\frac{\pi}{4} < \phi < \pi$. Assim sendo,

$$g(\phi,\theta) = (\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \sqrt{2}\cos\phi)$$

com $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Desta forma

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = (\sqrt{2}\cos\phi\cos\theta, \sqrt{2}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\phi)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, 0)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \phi}\times\frac{\partial g}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sqrt{2}\cos\phi\cos\theta & \sqrt{2}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta & -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\phi \\ -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta & \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (2\,\mathrm{sen}^2\phi\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}^2\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi)\end{aligned}$$

Disso resulta que

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial \phi}\times\frac{\partial g}{\partial \theta}\right\| = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^4\phi\cos^2\theta + 4\,\mathrm{sen}^4\phi\,\mathrm{sen}^2\theta + 4\,\mathrm{sen}^2\phi\cos^2\phi} = 2|\,\mathrm{sen}\,\phi| = 2\,\mathrm{sen}\,\phi$$

(pois $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \pi$). Assim,

$$\begin{aligned} Vol_2(S) &= \iint_D \left\|\frac{\partial g}{\partial \phi}\times\frac{\partial g}{\partial \theta}\right\| dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 2\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\phi d\theta \;=\; 2\pi\big(2+\sqrt{2}\big)\end{aligned}$$

(b) A superfície S é uma porção do parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$. Uma parametrização de S é (ver exercício 5(c)), é

$$g(u,v) = \big(u, v, u^2+v^2\big)$$

com $D = \{u^2+v^2 < 1\}$, e

$$\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v} = (-2u, -2v, 1)$$

A área de superfície pedida é

$$Vol_2(S) = \iint_S \|(-2u,-2v,1)\| dS = \iint_D \sqrt{1+4u^2+4v^2}\, du\, dv$$

Atendendo a que D é o círculo de centro na origem e raio 1, podemos usar coordenadas polares ($x = \rho\ cos\theta$ e $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$) pelo que

$$Vol_2(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\rho\, d\rho\, d\theta \;=\; \frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}$$

(c) O sólido é a parte interior ao parabolóide $z = x^2+y^2$ e exterior à superfície cilíndrica $x^2+y^2 = 1$ compreendida entre os planos horizontais $z = 1$ e $z = 4$. O seu topo, que designamos por S_T, é a coroa circular

$$1 < x^2+y^2 < 4 \qquad \text{contida no plano } z = 4;$$

a superfície (lateral) interior, S_1, é a face do cilindro dada por $x^2+y^2=1$ e a superfície (lateral) exterior, S_2, é o parabolóide $z=x^2+y^2$, ambas entre os planos $z=1$ e $z=3$. Intersectando tanto o parabolóide como o cilindro com o plano $z=1$ obtém-se a mesma curva: $x^2+y^2=1$, $z=1$. Assim, a base do sólido é uma curva que, como tal, não contribui para o valor da área. Assim sendo, e executando desde já o cálculo (elementar!) das áreas de S_T e S_1:

$$\begin{aligned} Vol_2(S) &= Vol_2(S_T)+Vol_2(S_1)+Vol_2(S_2) \\ &= \left(\pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2\right) \;+\; (2\pi\cdot 1)\cdot 3 \;+\; Vol_2(S_2) \\ &= 9\pi \;+\; Vol_2(S_2) \end{aligned}$$

Quanto à área de S_2 sabemos que

$$Vol_2(S_2) \;=\; \iint_{S_4} dS$$

Para calcular o integral, vamos começar por parametrizar a superfície. Em coordenadas cartesianas

$$g(x,y)=(x,y,x^2+y^2)$$

onde $g:T\to S_2$, com $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<2\right\}$. Assim:

$$\begin{aligned} Vol_2(S_2) &= \iint_T \left\| \frac{\partial g}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial y}\right\| dx\,dy \\ &= \iint_T \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dx\,dy \end{aligned}$$

Mudando para coordenadas polares,

$$\begin{aligned} Vol_2(S_2) &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(4r^2+1\right)^{1/2} r\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi\,\frac{2}{3\cdot 8}\left(4r^2+1\right)^{3/2}\Big|_1^2 \;=\; \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2}-5^{3/2}\right) \end{aligned}$$

Finalmente

$$Vol_2(S) \;=\; 9\pi+\frac{\pi}{6}\left(17^{3/2}-5^{3/2}\right)$$

3. Seja $f:K\to\mathbb{R}$ de classe C^1 no compacto $K\subset\mathbb{R}^2$ com fronteira de conteúdo nulo e interior não-vazio. Mostre que a área da superfície $z=f(x,y)$, para $(x,y)\in K$, é dada

pela fórmula

$$A = \iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

Aproveite o resultado para determinar a área da porção do paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Resolução:

Uma parametrização da superfície, que designamos por S, é $g : K \to S$ dada por

$$g(x, y) = \big(x, y, f(x, y)\big).$$

A área de S é, pois, dada por

$$A = \iint_S dS = \iint_K \left\|\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}\right\| dudv$$

Temos assim que

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right).$$

Desta forma

$$A = \iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

que é a fórmula pretendida.

Vamos aplicar esta fórmula ao cálculo pedido. Temos que

$$z = f(x, y) = y^2 - x^2$$

com $D = \big\{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\big\}$. Então:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4x^2}\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares temos que

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

pelo que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $1 \leq r \leq 2$. Então

$$A \;=\; \int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta \;=\; 2\pi \int_1^2 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr$$

Fazendo a mudança de variável $u = 1+4r^2$ (o que implica $5 \leq u \leq 17$ e $\frac{du}{dr} = 8r$. Então

$$A \;=\; \frac{2\pi}{8}\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{17}} u^{1/2}\, du \;=\; \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)$$

4. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; y = x^2 + z^2 \;;\; 1 < y < 4\}.$$

Sabendo que S tem densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = \sqrt{1+4(x^2+z^2)}$ calcule a massa total de S.

Resolução:

A massa de S é dada pelo integral

$$M(S) \;=\; \int_S \alpha\, dS.$$

Considerando a parametrização

$$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho^2, \rho \operatorname{sen}\theta) \quad , \quad 0 < \theta < 2\pi \;\; , \;\; 1 < \rho < 2$$

tem-se que

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}\right\| = \rho\sqrt{1+4\rho^2}.$$

Desta forma

$$M(S) \;=\; \int_0^{2\pi}\int_1^2 \alpha(g(\rho,\theta))\left\|\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}\right\| d\rho\, d\theta \;=\; 2\pi\int_1^2 (1+4\rho^2)\,\rho\, d\rho = 33\pi.$$

5. Seja f um campo escalar de classe C^2 e F um campo vectorial também de classe C^2. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique porquê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vectorial ou escalar.

   (a) $\operatorname{div}(\nabla f)$

(b) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, F)$

(c) $\nabla f \times (\mathrm{div}\, F)$

Resolução:

(a) Sendo f um campo escalar de classe C^2, o gradiente de f está bem definido

$$\mathrm{grad}\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

e representa um campo vectorial de classe C^1. Sendo assim $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f)$ está bem definido

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$$

e é um campo escalar que, com vimos acima, é igual ao laplaciano de f.

(b) Sendo F um campo vectorial de classe C^2, $\mathrm{rot}\, F$ está bem definido

$$\mathrm{rot}\, F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

e representa um campo vectorial. Sendo assim $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, F)$ está bem definido e é também um campo vectorial.

(c) Sendo f um campo escalar de classe C^2, o gradiente de f está bem definido e representa um campo vectorial. Por outro lado, sendo F um campo vectorial $\mathrm{div}\, F$ está bem definido e representa um campo escalar. Atendendo a que o produto externo é uma operação definida entre dois vectores, $\mathrm{grad}\, f \times \mathrm{div}\, F$ não está definido.

6. Determine o rotacional e a divergência do campo vectorial definido por

   (a) $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z)$

   (b) $F(x, y, z) = (xyz, 0, -x^2 y)$

Resolução:

(a) Seja $r(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$. Então

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{r}.$$

Identicamente,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{y}{r} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Desta forma, e como $F(x,y,z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, tem-se que

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \end{vmatrix} = \left(-\frac{z\,\frac{y}{r}}{r^2} + \frac{y\,\frac{z}{r}}{r^2},\ \frac{z\,\frac{x}{r}}{r^2} - \frac{x\,\frac{z}{r}}{r^2},\ -\frac{y\,\frac{x}{r}}{r^2} + \frac{x\,\frac{y}{r}}{r^2}\right) = (0,0,0)$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right) \\ &= \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} + \frac{r - \frac{y^2}{r}}{r^2} + \frac{r - \frac{z^2}{r}}{r^2} \\ &= \frac{3r - \frac{x^2+y^2+z^2}{r}}{r^2} = \frac{3r - r}{r^2} = \frac{2}{r} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}$$

(b) Tem-se que

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & 0 & -x^2y \end{vmatrix} = \left(-x^2, 3xy, -xz\right)$$

e

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2y) = yz$$

7. Demonstre as identidades, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existem e são contínuas. Se f for um campo escalar e F, G foram campos vectoriais, então fF, $F \cdot G$ e $F \times G$ são definidos como usual.
   (a) $\operatorname{div}(F+G) = \operatorname{div} F + \operatorname{div} G$.
   (b) $\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + F \cdot \nabla f$
   (c) $\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G$
   (d) $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$.

Resolução:

Suponhamos que $F = (P_1, Q_1, R_1)$ e $G = (P_2, Q_2, R_2)$.

(a) Temos que $F + G = (P_1 + P_2, Q_1 + Q_2, R_1 + R_2)$. Então,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(F+G) &= \frac{\partial(P_1+P_2)}{\partial x} + \frac{\partial(Q_1+Q_2)}{\partial y} + \frac{\partial(R_1+R_2)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial z} \\
&= \operatorname{div} F + \operatorname{div} G
\end{aligned}$$

(b) Supondo $F = (P, Q, R)$ temos $fF = (fP, fQ, fR)$. Então,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(fF) &= \frac{\partial(fP)}{\partial x} + \frac{\partial(fQ)}{\partial y} + \frac{\partial(fR)}{\partial z} \\
&= f\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}P + f\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}Q + f\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}R \\
&= f\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot(P, Q, R) \\
&= f\operatorname{div} F + F\cdot\nabla f
\end{aligned}$$

(c) Temos que

$$F \times G = (Q_1R_2 - Q_2R_1, P_2R_1 - P_1R_2, P_1Q_2 - Q_1R_2)$$

Então,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(F\times G) &= \frac{\partial(Q_1R_2 - Q_2R_1)}{\partial x} + \frac{\partial(P_2R_1 - P_1R_2,)}{\partial y} + \frac{\partial(P_1Q_2 - P_2Q_1)}{\partial z} \\
&= Q_1\frac{\partial R_2}{\partial x} + R_2\frac{\partial Q_1}{\partial x} - Q_2\frac{\partial R_1}{\partial x} - R_1\frac{\partial Q_2}{\partial x} + R_1\frac{\partial P_2}{\partial y} + P_2\frac{\partial R_1}{\partial y} \\
&\quad -R_2\frac{\partial P_1}{\partial y} - P_1\frac{\partial R_2}{\partial y} + P_1\frac{\partial Q_2}{\partial z} + Q_2\frac{\partial P_1}{\partial z} - P_2\frac{\partial Q_1}{\partial z} - Q_1\frac{\partial P_2}{\partial z} \\
&= P_1\left(\frac{\partial Q_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial y}\right) + Q_1\left(\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial z}\right) + R_1\left(\frac{\partial P_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial x}\right) \\
&\quad +P_2\left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}\right) + Q_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x}\right) + R_2\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right) \\
&= -F\cdot\operatorname{rot} G + G\cdot\operatorname{rot} F
\end{aligned}$$

(d) Da alínea anterior, temos que

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \nabla g \cdot \operatorname{rot}(\nabla f) - \nabla f \cdot \operatorname{rot}(\nabla g)$$

Se f é uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$ então $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$. Deste resultado, obtemos que

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \nabla g \cdot 0 - \nabla f \cdot 0 = 0$$

8. Verifique as seguintes igualdades:

   (a) $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $r = |\mathbf{r}|$.

   (b) div$(r\mathbf{r}) = 4r$. sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $r = |\mathbf{r}|$.

   Resolução:

(a) Sendo $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} r &= \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) \\
&= \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= \frac{\mathbf{r}}{r}
\end{aligned}$$

(b) Tem-se que (utilizando os cálculos das derivadas parciais de r do problema 2(a)):

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(r\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(xr) + \frac{\partial}{\partial y}(yr) + \frac{\partial}{\partial z}(zr) \\
&= r + x\frac{x}{r} + r + y\frac{y}{r} + r + z\frac{z}{r} \\
&= 3r + \frac{x^2+y^2+z^2}{r} = 4r
\end{aligned}$$

9. Mostre que $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ satisfaz a equação de Laplace $\Delta f = 0$, excepto no ponto $(0, 0)$.

   Resolução:

Para mostrar que f verifica a equação de Lapalace, há que verificar

$$\Delta f \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \;=\; 0$$

Então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) \;=\; \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \;=\; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) \;=\; \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Desta forma, $\Delta f = 0$.

10. Mostre que qualquer campo vectorial da forma

$$F(x,y,z) \;=\; \Big(f(x), g(y), h(z)\Big),$$

em que f, g e h são continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$, é irrotacional.

Resolução:

Basta mostrar que $\operatorname{rot} F = 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Assim

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} F \;&=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(x) & g(y) & h(z) \end{vmatrix} \\
&=\; \left(\frac{\partial}{\partial y}h(z) - \frac{\partial}{\partial z}g(y), \frac{\partial}{\partial z}f(x) - \frac{\partial}{\partial x}h(z), \frac{\partial}{\partial x}g(y) - \frac{\partial}{\partial y}f(x)\right) \\
&=\; (0,0,0),
\end{aligned}$$

como se queria mostrar.

11. Existe um campo vectorial G em $\mathbb{R}^3$ tal que rot $G = (x \operatorname{sen} y, \cos y, z - xy)$? Justifique.

Resolução:

Vamos supor que existe efectivamente um campo vectorial G tal que $\operatorname{rot} G = F(x,y,z) = (x \operatorname{sen} y, \cos y, z - xy)$. Comecemos por calcular $\operatorname{div} F$. Temos que

$$\operatorname{div} F \;=\; \frac{\partial}{\partial x}(x \operatorname{sen} y) + \frac{\partial}{\partial y}(\cos y) + \frac{\partial}{\partial z}(z - xy) \;=\; \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y + 1 \;=\; 1$$

Sabemos que se G é um campo vectorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, então $\operatorname{div}(\operatorname{rot} G) = 0$. Mas como

$$\operatorname{div} F = \operatorname{div}(\operatorname{rot} G) \neq 0,$$

concluimos (por redução ao absurdo) que não pode existir G tal que $F = \operatorname{rot} G$ em $\mathbb{R}^3$.

12. Mostre que qualquer campo vectorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, da forma

$$F(x, y, z) = (f(y, z), g(x, z), h(x, y))$$

é incompressível.

Resolução:

Basta mostrar que div $F = 0$ para todo o $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Assim

$$\operatorname{div}\ F = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f(y,z)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,z)}{\partial y} + \frac{\partial h(x,y)}{\partial z} = 0,$$

como se queria mostrar.