TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Resolvidos nº 6

Superfícies

1. Determine se os pontos $P(7,10,4)$ e $Q(5,22,5)$ pertencem à superfície $r(u,v) = (2u + 3v, 1 + 5u - v, 2 + u + v)$.

   Resolução:

Para mostrar se um ponto P_0 pertence à superfície há que determinar (se existir) um par (u_0, v_0) para o qual $P_0 = r(u_0, v_0)$. Assim para verificar se o ponto $P(7,10,4)$ pertence à superfície há que resolver

$$r(u,v) = (7,10,4) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2u + 3v = 7 \\ 1 + 5u - v = 10 \\ 2 + u + v = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \\ 5 = 4 \end{cases}$$

que é claramente um sistema impossível. Conclui-se que o ponto P **não** pertence à superfície.

Analogamente, para verificar se o ponto Q pertence à superfície, há que resolver o sistema

$$r(u,v) = (5,22,5) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2u + 3v = 5 \\ 1 + 5u - v = 22 \\ 2 + u + v = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = 4 \\ v = -1 \\ 5 = 5 \end{cases}$$

Tem-se então que $r(4,-1) = (5,22,5)$; conclui-se que o ponto Q pertence à superfície.

2. Determine uma representação paramétrica para as superfícies definidas como se segue.

   (a) A superfície definida por $x + 2y + 3z = 4$, x, y e $z \in \mathbb{R}$.

   (b) O plano que passa pelo ponto $(1,2,-3)$ e contém os vectores $(1,1,-1)$ e $(1,-1,1)$.

   (c) A esfera de centro na origem e de raio 4.

   (d) A superfície S caracterizada por $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e $z \geq 0$. (Apresente duas parametrizações distintas desta superfície S).

   (e) A superfície $z = 4 - y^2$ cortada pelos planos $x = 0$, $x = 2$ e $z = 0$.

(f) A face do cilindro $(x-2)^2+z^2=4$ entre os planos $y=0$ e $y=3$.

(g) A superfície esférica $x^2+y^2+z^2=3$ situada entre os planos $z=\sqrt{3}/2$ e $z=-\sqrt{3}/2$.

(h) A superfície de revolução, obtida por uma rotação de um ângulo de 2π radianos em torno do eixo Oy, da curva γ parametrizada por

$$r(t) \;=\; \big(f(t), g(t), 0\big) \quad , \quad t \in [a,b]$$

onde $f(t)>0$ para qualquer $t \in [a,b]$.

Resolução:

(a) Trata-se do plano de equação $x+2y+3z=4$. Dado que $x=4-2y-3z$ (ou seja, os pontos da superfície são o gráfico de uma função $x=g(y,z)$) tomamos y e z como parâmetros e consideramos

$$\begin{cases} x = 4-2u-3v \\ y = u \\ z = v \end{cases} \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

como uma parametrização da superfície S. Também podemos considerar como parametrizações de S as funções vectoriais

$$\begin{cases} x = u \\ y = \frac{4-u-3v}{2} \\ z = v \end{cases} \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

onde considerámos x e z como parâmetros, e

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{4-u-2v}{3} \end{cases} \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

onde considerámos x e y como parâmetros.

Outra parametrização surge naturalmente da equação vectorial de um plano. Atendendo aos vectores directores do plano, os quais podem ser facilmente obtidos a partir de três pontos do plano que não sejam colineares, é possível obter a equação vectorial do plano. De facto, consideremos os seguintes pontos do plano $x+2y+3z=4$

$$A(-1,1,1) \quad , \quad B(3,-1,1) \quad \text{e} \quad C(-4,1,2)$$

a que correspondem os vectores directores do plano

$$\overrightarrow{AB} = B-A = (4,-2,0) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = C-A = (-3,0,1)$$

O plano $x + 2y + 3z = 4$ tem então por equação vectorial

$$(x, y, z) = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \quad , \quad t, s \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$(x, y, z) = (-1, 1, 1) + t(4, -2, 0) + s(-3, 0, 1) \quad , \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Daqui resultam as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 + 4t - 3s \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + s \end{cases} \qquad (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) A equação vectorial do plano é dada por

$$(x, y, z) = (1, 2, -3) + u(1, 1, -1) + v(1, -1, 1)$$

com u e $v \in \mathbb{R}$. Tem-se então que

$$\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u - v \\ z = -3 - u + v \end{cases}$$

e, como tal, uma parametrização será

$$r(u, v) = (1 + u + v, 2 + u - v, -3 - u + v) \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

(c) Trata-se da superfície S definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Utilizando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \tag{1}$$

com $\theta \in]0, 2\pi[$ e $\varphi \in]0, \pi[$, vê-se que S é constituida por todos os pontos dados por (1) tais que $\rho = 4$; ou seja,

$$\begin{cases} x = 4 \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = 4 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = 4 \cos\varphi \end{cases}$$

com $(\theta, \varphi) \in T =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$. Assim sendo, a parametrização pretendida é:

$$g(\theta, \varphi) = \big(4 \cos\theta \operatorname{sen}\varphi, 4 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, 4 \cos\varphi\big) \qquad \text{para } (\theta, \varphi) \in T.$$

(d) Trata-se do hemisfério norte (a "metade superior") da superfície esférica de centro na origem, $(0, 0, 0)$, e raio 4. Como na alínea anterior, podemos considerar para S uma parametrização baseada nas coordenadas esféricas (1)

$$\begin{cases} x = 4\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = 4\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = 4\cos\varphi \end{cases}$$

onde $\theta \in]0, 2\pi[$ mas $\varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (que nos dá os ângulos φ correspondentes apenas aos pontos do hemisfério norte da esfera).

Pode-se obter uma outra parametrização resolvendo a equação da esfera em ordem a z:

$$z = \pm\sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

Como $z > 0$ (hemisfério norte), a solução que nos interessa é a que corresponde ao sinal positivo. A projecção da esfera no plano xy é o disco

$$B = \left\{(x.y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\right\},$$

pelo que a parametrização é

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

para $(x, y) \in B$, ou seja

$$g(x, y) = \left(x, y, \sqrt{16 - x^2 - y^2}\right), \qquad (x, y) \in B.$$

(e) A superfície obtém-se por translação da parábola $z = 4 - y^2$ segundo a direcção do eixo dos x (faça uma figura). É então conveniente usar x como um dos parâmetros. Dado que $z = 1 - y^2$, tomamos também y como parâmetro. Assim sendo,

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 4 - v^2 \end{cases}$$

onde $0 < x < 2$ implica que $0 \leq u \leq 2$. Por outro lado, sendo S cortada pelo plano $z = 0$ então $z > 0 \iff 4 - y^2 > 0 \iff -2 < v < 2$. Obteve-se assim a parametrização

$$r(u, v) = \left(u, v, 4 - v^2\right) \quad , \quad 0 < u < 2 \ \ , \ \ -2 < v < 2.$$

(f) Tratando-se de uma superfície cilíndrica com eixo na recta $(x, y, z) = (2, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, é de todo conveniente usar as coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = 2 + \rho\cos\theta \\ y = t \\ z = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = t \\ z = 2\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

e uma parametrização será

$$r(t, \theta) = (2 + 2\cos\theta, t, 2\operatorname{sen}\theta) \quad , \quad 0 < t < 3 \ , \ 0 < \theta < 2\pi.$$

(g) Neste exercício é conveniente usar coordenadas esféricas. Assim, escolhendo os ângulos dessas coordenadas para parâmetros, vamos ter

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = \sqrt{3}\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ z = \sqrt{3}\cos\varphi \end{cases}$$

ou seja, a parametrização dada por:

$$r(\theta, \varphi) \ = \ \Big(\sqrt{3}\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \sqrt{3}\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \sqrt{3}\cos\varphi\Big)$$

Sabemos que a esfera foi cortada pelos planos <u>horizontais</u> $z = \sqrt{3}/2$ e $z = -\sqrt{3}/2$, o que não restringe θ; como tal, $\theta \in \,]0, 2\pi[$. Por outro lado, como qualquer ponto da superfície tem coordenada z no intervalo $\big]-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2\big[$, temos que

$$-\tfrac{1}{2} < \cos\varphi < \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \arccos\tfrac{1}{2} < \varphi < \pi - \arccos\tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{\pi}{3} < \varphi < \tfrac{2\pi}{3}$$

Resulta então que $\varphi \in \big]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\big[$.

(h) Cada um dos pontos de $\gamma(t) = \big(f(t), g(t)\big)$ descreve uma circunferência centrada num ponto do eixo Oy, e contida no plano $y = g(t)$ (que é paralelo ao plano coordenado xz); nesta rotação, a coordenada y permanece com o valor $g(t)$, enquanto (x, z) descreve uma circunferência de raio $f(t)$ centrada no ponto $(0, g(t), 0)$. Deste modo, obtém-se a superfície de revolução parametrizada por

$$r(t, \theta) \ = \ \Big(f(t)\cos\theta, \ g(t), \ f(t)\operatorname{sen}\theta\Big)$$

para $a < t < b$ e $0 < \theta < 2\pi$.

3. Identifique a superfície parametrizada por:

   (a) $r(u,v) = (v\cos u, v\operatorname{sen} u, v)$, $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq h$, onde $h > 0$ é um real dado.

   (b) $r(u,v) = (1, u, v)$, $0 < u < 1$, $0 < v < 1$.

   (c) $r(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$ com $(u,v) \in D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u^2 + v^2 < 1\}$.

Resolução:

(a) Como se vê, a superfície está parametrizada à custa de coordenadas cilindricas. Tomando isso em consideração, pode-se eliminar os parâmetros u e v como se segue:

$$x^2 + y^2 = v^2 \ \text{ e } \ z = v \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = x^2 + y^2$$

A superfície é pois uma parte do cone com vértice no origem, geratriz $z = x$ e eixo de simetria coincidente com o eixo dos z. Olhando agora para o domínio dos parâmetros observa-se que $z = v$ é positivo e menor que h; assim, a superfície é a face lateral do cone dada por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $0 \leq z \leq h$.

(b) Trata de uma porção de um plano, dado que a parametrização é uma transformação linear. Ora $y = u$ e $z = v$ significam que y e z podem tomar quaisquer valores nos intervalos indicados. Assim, a equação cartesiana da superfície é

$$x = 1$$

com $0 < y < 1$ e $0 < z < 1$.

(c) Conforme se constata por eliminação dos parâmetros $u = x$ e $v = y$, a função $r(u,v)$ parametriza o parabolóide de equação

$$z = x^2 + y^2, \quad \text{com} \quad x^2 + y^2 < 1$$

equivalente a

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{com} \quad 0 \leq z < 1.$$

Note que $z = u^2 + v^2 < 1$ é consequência de $u^2 + v^2 < 1$. O domínio $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ corresponde à projecção da superfície cónica $z^2 = x^2 + y^2$ e $0 \leq z < 1$ no plano xy.

4. Determine a expressão geral do vector normal unitário à superfície S definida por:

   (a) $x + 2y + 3z = 4$, com orientação para cima.

   (b) $z = 9 - x^2 - y^2$, com orientação para baixo.

Resolução:

(a) Dada a parametrização $r(u,v) = (4 - 2u - 3v, u, v)$, para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, apresentada no Exercício 2(a), temos

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (-2, 1, 0) \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial v} = (-3, 0, 1)$$

Como tal, a expressão geral dum vector normal a S é

$$\overrightarrow{N} = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, 3)$$

Dado que a superfície S é orientada para cima, consideramos este vector e não o seu simétrico $-\overrightarrow{N}$. A expressão geral do vector normal unitário a S é

$$\nu \ = \ \frac{\overrightarrow{N}}{||\overrightarrow{N}||} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$$

De outra forma (bastante mais simpes, por sinal), dado que a superfície é da forma

$$F(x,y,z) = 4$$

com $F(x,y,z) = x + 2y + 3z$, trata-se de uma curva de nível de F e assim um vector normal pode ser dado por

$$\overrightarrow{N} \ = \ \nabla F(x,y,z) \ = \ \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \ = \ (1, 2, 3)$$

(b) Trata-se do parabolóide de equação $z = 9 - x^2 - y^2$. Uma parametrização de S é

$$r(u,v) = \big(u, v, 9 - u^2 - v^2\big) \quad , \quad (u,v) \in D$$

em que $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u^2 + v^2 = 9\}$ (dado que a intersecção de $z = 9 - x^2 - y^2$ com $z = 0$ é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$). Assim, a expressão geral do vector normal é

$$\overrightarrow{N} = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

Dado que se pretende a superfície S orientada para baixo, há que considerar o vector simétrico $-\overrightarrow{N} = (-2u, -2v, -1)$ que "aponta para baixo". A expressão geral do vector normal unitário é

$$\nu = \frac{\overrightarrow{N}}{||\overrightarrow{N}||} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}(-2u, -2v, -1)$$

Mais uma vez, a superfície é da forma

$$F(x, y, z) = 9$$

com $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$, tarta-se de uma curva de nível de F e assim o vector normal é dado por

$$\overrightarrow{N} = \nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 1)$$

5. Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada por $r(u, v)$ no ponto especificado.

   (a) $g(u, v) = (u^2, 2u \operatorname{sen} v, u \cos v)$, $(u_0, v_0) = (1, 0)$.

   (b) $g(u, v) = (u - v, u^2 + v^2, uv)$, no ponto $r(1, 1)$.

   (c) $g(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, no ponto $r(1, 1)$

   Resolução:

(a) Temos que

$$g(u, v) = \big(u^2, 2u \operatorname{sen} v, u \cos v\big)$$

pelo que

$$\begin{cases} x(u, v) = u^2 \\ y(u, v) = 2u \operatorname{sen} v \\ z(u, v) = u \cos v \end{cases}$$

Primeiro, vamos calcular os vectores tangentes:

$$g_u = \frac{\partial g}{\partial u} = (2u, 2 \operatorname{sen} v, \cos v)$$

e

$$g_v = \frac{\partial g}{\partial v} = (0, 2u \cos v, -u \operatorname{sen} v)$$

Assim, um vector normal ao plano tangente é:

$$g_u \times g_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2u & 2 \operatorname{sen} v & \cos v \\ 0 & 2u \cos v & -u \operatorname{sen} v \end{vmatrix} = \big(-2u \operatorname{sen}^2 v - 2u \cos^2 v, 2u2 \operatorname{sen} v, 4u^2 \cos v\big)$$

e no ponto dado $u = 1$ e $v = 0$ temos que este vector normal é $(-2, 0, 4)$. Portanto, uma equação do plano tangente no ponto $g(1, 0) = (1, 0, 1)$ é

$$-2 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0) + 4 \cdot (z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2z + 1 = 0$$

Doutra forma, eliminando os parâmetros, temos que a superfície é dada por

$$x = \frac{y^2}{4} + z^2$$

ou seja, a superfície é definida pela equação

$$F(x, y, z) = 0$$

com $F(x, y, z) = x - \frac{y^2}{4} - z^2$, trata-se de uma superfície é de nível de F e assim um vector normal é dado por

$$\overrightarrow{N}(x, y, z) = \nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(1, -\frac{y}{2}, -2z\right)$$

Assim uma equação do plano tangente a S no ponto $g(1, 0) = (1, 0, 1)$ é dada por

$$\overrightarrow{N}(1, 0, 1) \cdot (x - 1, y, z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1, 0, -2) \cdot (x - 1, y, z - 1) = 0$$

obtendo-se assim (o mesmo resultado)

$$(x - 1) - 2(z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2z + 1 = 0.$$

(b) Temos que

$$g(u, v) = \left(u - v, u^2 + v^2, uv\right)$$

pelo que

$$\begin{cases} x(u, v) = u - v \\ y(u, v) = u^2 + v^2 \\ z(u, v) = uv \end{cases}$$

Primeiro, vamos calcular vectores tangentes:

$$g_u = \frac{\partial g}{\partial u} = (1, 2u, v)$$

e

$$g_v = \frac{\partial g}{\partial v} = (-1, 2v, u)$$

Assim, um vector normal ao plano tangente é:

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2u & v \\ -1 & 2v & u \end{vmatrix} = \left(2u^2 - 2v^2, -u - v, 2u + 2v\right)$$

e no ponto dado $(u, v) = (1, 1)$ temos que um vector normal é $(0, -2, 4)$. Portanto, uma equação do plano tangente ao ponto $r(1, 1) = (0, 2, 1)$ é

$$0 \cdot (x - 0) - 2 \cdot (y - 2) + 4 \cdot (z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y - 2z = 0$$

Note que, neste caso, é difícil obter a representação como conjunto de nível 0, pois dá algum trabalho eliminar os parâmetros em $g(u,v)$; portanto, é aconselhável esta forma de fazer o exercício.

(c) Sendo que

$$g(u,v) = \left(u, v, u^2 + v^2\right),$$

ou seja,

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = u^2 + v^2 \end{cases}$$

Os vectores tangentes são:

$$g_u = \frac{\partial g}{\partial u} = (1, 0, 2u),$$
$$g_v = \frac{\partial g}{\partial v} = (0, 1, 2v).$$

Assim, um vector normal ao plano tangente é:

$$g_u \times g_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1)$$

No ponto dado, $(u,v) = (1,1)$, um vector normal é $(-2,-2,1)$. Portanto, uma equação do plano tangente ao ponto $g(1,1) = (1,1,2)$ é

$$-2 \cdot (x-1) - 2(y-1) + (z-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2y - z = 2.$$

Se preferir, a equação vectorial deste plano tangente é:

$$(x,y,z) = (1,1,2) + s(1,0,2) + t(0,1,2)$$

com t, $s \in \mathbb{R}$.

Doutra forma, eliminando os parâmetros, temos que a superfície é dada por

$$z = x^2 + y^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad F(x,y,z) = 0$$

com $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$; trata-se de uma curva de nível 0 de F e, assim, um vector normal é dado por

$$\overrightarrow{N} = \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (2x, 2y, -1)$$

Assim, uma equação do plano tangente a S no ponto $g(1,0) = (1,1,2)$ é dada por

$$\overrightarrow{N}(1,1,2) \cdot (x-1, y-1, z-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2,2,-1) \cdot (x-1, y-1, z-2) = 0$$

obtendo-se assim

$$2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2y - z = 2$$