Cálculo Diferencial e Integral III

$1^{\underline{o}}$ Semestre 2024/2025

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 6

Superfícies

1. Determine se os pontos $P(3,-1,5)$ e $Q(-1,3,4)$ pertencem à superfície parametrizada por $g(u,v) = (u+v, u^2 - v, u + v^2)$.

2. Determine uma representação paramétrica das superfícies descritas por:

   (a) o plano que passa pelos pontos $(1,2,-3)$, $(2,3,-4)$ e $(2,1,-2)$.

   (b) A porção do cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que se encontra entre os planos $x = 0$ e $x = 5$.

   (c) A porção no primeiro octante do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 0$ e $z = 3$.

   (d) A parte do plano $z = x + 3$ no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

3. Identifique e faça um esboço da imagem da superfície parametrizada por

   (a) $g(u,v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$ com $u^2 + v^2 < 1$

   (b) $g(u,v) = (2 \operatorname{sen} u, 3 \cos u, v)$, $0 < v < 2$

   (c) $g(u,v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, \frac{1}{v^2})$ com $0 \leq u < 2\pi$ e $v > 0$.

   (d) $g(u,v) = (u + v, 3 - v, 1 + 4u + 5v)$, para $u, v \in \mathbb{R}$.

4. Mostre que as equações paramétricas $x = a \cosh u \cos v$, $y = b \cosh u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{senh} u$, representam um hiperboloide com uma folha.

5. Determine a expressão geral do vector normal unitário à superfície S definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, orientada para fora.

6. Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada por $g(u,v)$ no ponto especificado.

   (a) $x = u^2$, $y = v^2$, $z = uv$ em $u = 1$, $v = 1$.

   (b) $x = u + v$, $y = 3u^2$, $z = u - v$ no ponto $(2,3,0)$.

   (c) $g(u,v) = (\operatorname{arctg}(uv), e^{u^2 - v^2}, u - v)$ no ponto $g(1,-1)$.

7. Considere o paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

   (a) Determine uma representação paramétrica $g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ da superfície.

   (b) Calcule a equação do plano tangente à superfície no ponto $(-a\pi, 0, \pi^2)$.

1 Soluções

1. P pertence à superfície e Q não pertence à superfície.

2. (a) $x = 1 + u + v$, $y = 2 + u - v$, $z = -3 - u + v$ com $u, v \in \mathbb{R}$
   (b) $x = u$, $y = 4\cos\theta$, $z = 4\,\mathrm{sen}\,\theta$ com $0 \le u \le 5$ e $0 \le \theta \le 2\pi$
   (c) $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, $z = r$, com $0 \le r \le 3$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.
   (d) $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, $z = 3 + r\cos(\theta)$, onde $0 \le r < 1$ e $0 \le \theta \le 2\pi$.

3. (a) Semi superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y \ge 0$.
   (b) Parte do cilindro $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ em $0 \le z \le 2$
   (c) Gráfico de $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$
   (d) O plano $4x - y - z = -4$.

4. Note que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

5. Sendo a superfície dada por $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, então (por exemplo)

$$\overrightarrow{N}(x, y, z) = \frac{1}{2}\nabla F = \big(x, y, z\big)$$

   e

$$\nu(x, y, z) = \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\big(x, y, z\big) = \frac{1}{3}\big(x, y, z\big)$$

   para cada (x, y, x) satisfazendo $F(x, y, z) = 0$.

6. (a) $x + y - 2z = 0$
   (b) $3x - y + 3z = 3$
   (c) $(x, y, z) = (-\frac{\pi}{4}, 1, 2) + s(-\frac{1}{2}, 2, 1) + t(\frac{1}{2}, 2, -1)$, s, $t \in \mathbb{R}$.

7. (a) $x = u$, $y = v$, $z = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}$, com u, $v \in \mathbb{R}$.
   (b) $\frac{2\pi}{a}x + z = -\pi^2$