

## Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiom, LEBiol

### Ficha de Problemas nº 5

#### Existência, unicidade, prolongamento e comparação de soluções

1. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

$$(a) y' = \frac{ty}{1+t^2}, \quad (b) y' = (2-y)(y-1),$$

$$(c) y' = y(1-y^2), \quad (d) y' = \frac{y+t}{y-t},$$

#### O que é um campo de direcções?

Um campo de direcções da equação diferencial

$$y' = f(t, y)$$

é um gráfico constituído por segmentos de recta orientados com origem em cada ponto,  $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ , onde  $f$  está definida. Cada um desses segmentos de recta deve ser tangente ao gráfico da solução da equação diferencial no ponto  $(t, y)$ ; ele é, na verdade, uma representação miniaturizada da recta tangente ao gráfico da solução da equação diferencial que passa no ponto  $(t, y)$ .

Pode-se traçar um campo de direcções de qualquer equação diferencial da forma  $y' = f(x, y)$ , mas o mesmo só tem utilidade quando  $f$  satisfaz as condições do teorema de Picard. Em particular, a unicidade de solução dos problemas de valor inicial é muito importante porque impede que os gráficos de duas soluções com condições iniciais distintas se intersectem; e isto possibilita o posicionamento relativo desses gráficos.

#### Como traçar um campo de direcções?

Para traçar um campo de direcções constroi-se um reticulado, por exemplo,

$$\{(n, m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

e calcula-se em todos os seus pontos o valor de  $f(n, m)$ . Os valores obtidos são o declive da recta tangente ao gráfico de  $y(x)$  no ponto  $(n, m)$ . Desenha-se então um pequeno segmento com origem em  $(n, m)$  e com declive  $f(n, m)$ .

Uma vez traçado o campo de direções, podemos usá-lo para esboçar as soluções da equação diferencial. Se estivermos nas condições do teorema de Picard, a unicidade de solução de qualquer problema de valor inicial garante que duas soluções com origem em pontos iniciais distintos nunca se intersectam. Dado que este traçado envolve erros, é a unicidade de solução que torna possível o esboço de soluções qualitativamente semelhantes às soluções exactas.

### Exemplo

Vamos traçar o campo de direções e esboçar algumas soluções da equação diferencial

$$y' = y - x$$

Vamos calcular  $y'$  usando alguns valores de  $(x, y) \in \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2, -2 \leq n, m \leq 2\}$ . Assim para  $x = -2$

y	-2	-1	0	1	2
y'	0	1	2	3	4

Para  $x = -1$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-1	0	1	2	3

Para  $x = 0$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-2	-1	0	1	2

Para  $x = 1$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-3	-2	-1	0	1

e para  $x = 2$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-4	-3	-2	-1	0

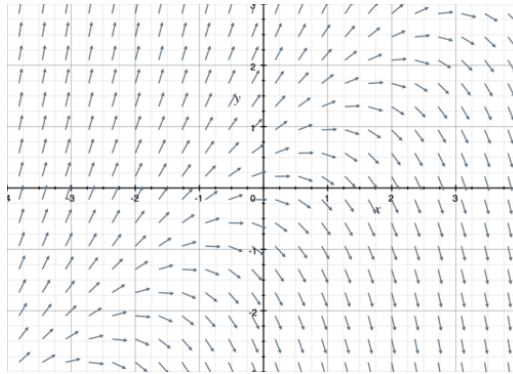


Figura 1: Campo de direções de  $y' = y - x$

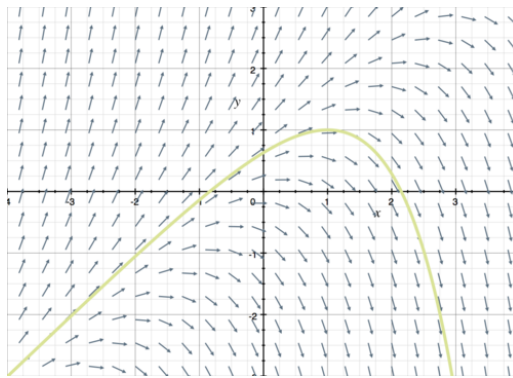


Figura 2: Campo de direções de  $y' = y - x$  e a solução que passa em  $(1, 1)$

Resolva os problemas cuja solução se apresenta de seguida.

**Solução:**

(a)  $y' = \frac{t y}{1 + t^2}$

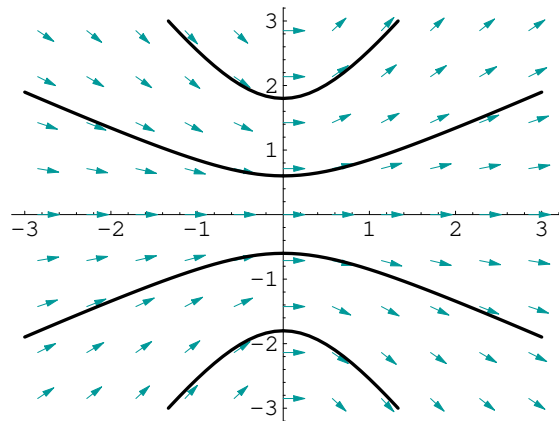


Figura 3: Campo de direções e algumas soluções de  $y' = \frac{t y}{1 + t^2}$

(b)  $y' = (2 - y)(y - 1)$

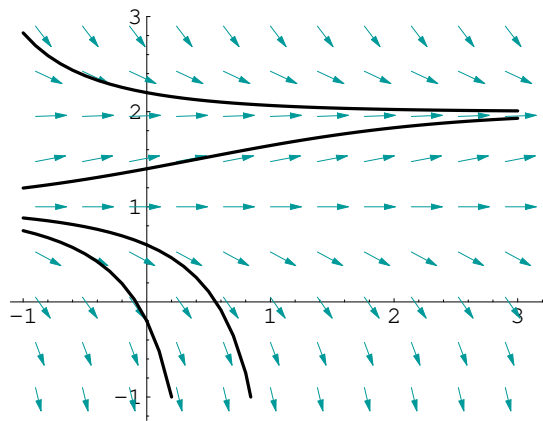


Figura 4: Campo de direções e algumas soluções de  $y' = (2 - y)(y - 1)$

(c)  $y' = y(1 - y^2)$

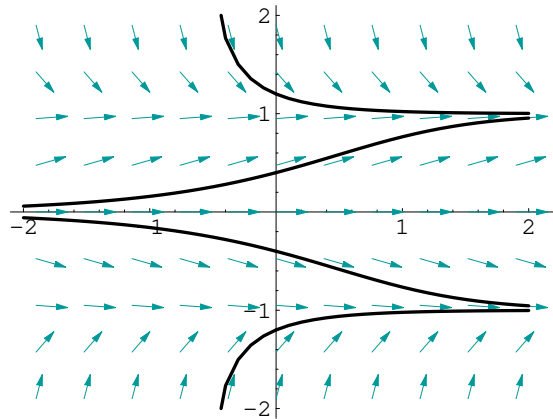


Figura 5: Campo de direções e algumas soluções de  $y' = y(1 - y^2)$

(d)  $y' = \frac{y + t}{y - t}$

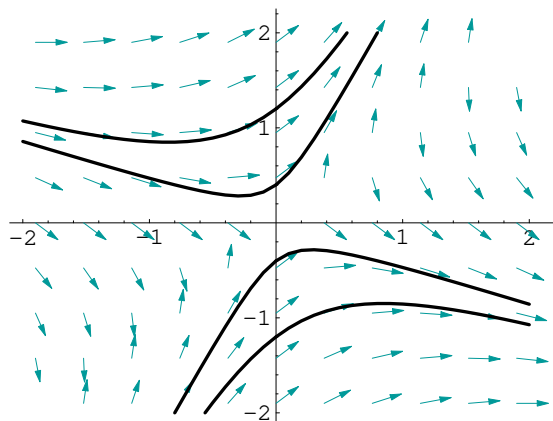


Figura 6: Campo de direções e algumas soluções de  $y' = \frac{y + t}{y - t}$

2. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2ty^{2/3} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

**Resolução**

Começamos por notar que a solução constante  $y(t) \equiv 0$  é solução do PVI. Por outro lado, se  $y(t) \neq 0$  a equação pode ser escrita na forma

$$y^{-2/3} \frac{dy}{dt} = 2t \Leftrightarrow \int y^{-2/3} dy = \int 2t dt + c \Leftrightarrow 3y^{1/3} = t^2 + c \Leftrightarrow y(t) = \left( \frac{t^2 + c}{3} \right)^3$$

Visto termos obtido uma função polinomial, verifica-se que estas soluções são de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}$  e também verificam a equação diferencial quando  $c \leq 0$  e  $y(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{-c}$  (basta substituir a solução geral obtida na equação diferencial). A solução que verifica a condição inicial  $y(0) = 0$  é

$$y(t) = \frac{t^6}{27},$$

pelo que acabámos de obter uma segunda solução do PVI.

Podemos agora utilizar o método de “cortar” e “colar” a solução geral

$$y(t) = \frac{(t^2 + c)^3}{27} \quad \text{e} \quad y(t) \equiv 0$$

e, dessa forma, obter novas soluções do PVI. Para isso é certamente necessário tomar  $c$  tal que a função obtida é contínua no ponto de “colagem” (que designamos por  $t_1$ ):

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \left( \frac{t^2 + c}{3} \right)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -t_1^2$$

Assim, para  $t_1 > 0$ , define-se

$$y_{t_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq t_1 \\ \frac{(t^2 - t_1^2)^3}{27} & \text{se } t > t_1 \end{cases}$$

Calculando também as derivadas laterais de  $y_{t_1}$  no ponto de “colagem” (exercício) verifica-se que

$$f'_d(t_1) = 0 = f'_e(t_1)$$

Desta forma,  $y_{t_1}$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e verifica a equação diferencial para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ ; note que foi construída à custa de soluções da equação diferencial, portanto só faltava verificar que a satisfazia também no ponto de “colagem”. Além disso,  $y_{t_1}(0) = 0$ .

De igual modo, para cada  $t_2 < 0$

$$y_{t_2}(t) = \begin{cases} \frac{(t^3 - t_2^2)^3}{27} & \text{se } t < s_0 \\ 0 & \text{se } t \geq s_0 \end{cases}$$

é também solução do PVI.

Finalmente, o facto de existir uma infinidade de soluções deve-se a que a função  $f(t, y) = 2ty^{2/3}$  é contínua em  $y \geq 0$ , mas não é de classe  $C^1$  em qualquer conjunto que contenha pontos da forma  $(t, 0)$ . De facto:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4t}{3} y^{-1/3} = \frac{4t}{3\sqrt[3]{y}} \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad y \rightarrow 0^+.$$

3. Para  $p$  um número real  $1 < p < 2$  considere

$$f(t, y) = p|y|^{\frac{p-1}{p}}, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^2$$

Considere-se o (PVI)

$$y' = f(t, y) \quad , \quad y(0) = 0$$

Mostre que o (PVI) admite uma infinidade de soluções. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

### Resolução

Uma das soluções do (PVI) é a solução constante  $y_c(t) \equiv 0$ . Por outro lado, se  $y(t) > 0$  a equação pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{p} y^{-\frac{p-1}{p}} \frac{dy}{dt} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \int \frac{1}{p} y^{-1+\frac{1}{p}} dy \right) = 1 \Leftrightarrow y^{1/p} = t + c \Leftrightarrow y(t) = (t + c)^p,$$

com  $c \in \mathbb{R}$ . Esta solução é continuamente diferenciável e verifica a equação desde que  $t + c > 0$ , isto é,  $t > -c$ .

Por outro lado, se  $y(t) < 0$  então  $|y| = -y$ , pelo que:

$$\frac{1}{p} (-y)^{-\frac{p-1}{p}} \frac{dy}{dt} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \int -\frac{1}{p} (-y)^{-1+\frac{1}{p}} dy \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow (-y)^{1/p} = -t + d \Leftrightarrow y(t) = -(d - t)^p, \quad \text{com } d \in \mathbb{R}.$$

Esta solução é continuamente diferenciável e verifica a equação desde que  $d - t > 0$ , isto é,  $t < d$ .

Podemos definir uma infinidade de soluções “cortando e colando” os três tipos de soluções acima obtidas. Tomando quaisquer  $c, d < 0$ , e definindo

$$y_{c,d}(t) = \begin{cases} -(d - t)^p & \text{se } t < d \\ 0 & \text{se } d \leq t \leq -c \\ (t + c)^p & \text{se } t > -c \end{cases}$$

o aluno pode verificar facilmente que  $y_{c,d}(t)$  é contínua e diferenciável em  $\mathbb{R}$ . Note que nos pontos  $t = d$  e  $t = -c$  deve verificar a igualdade dos limites e derivadas laterais.

Para verificar que não há contradição entre estas conclusões e o Teorema de Picard, note-se que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$  e

$$\begin{aligned} |f(t, y) - f(t, 0)| &= \left| p|y|^{\frac{p-1}{p}} \right| = \underbrace{p|y|^{-\frac{1}{p}}}_{\downarrow \text{ quando } y \rightarrow 0} |y - 0| \\ &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Desta forma, a derivada parcial de  $f$  relativamente a  $y$  em pontos da forma  $(t, 0)$ , com  $t \in \mathbb{R}$  é infinita, pelo que  $f$  não é de classe  $C^1$  em qualquer conjunto aberto que contenha o eixo  $y = 0$ .

Concluimos então que a continuidade de  $f$  implica existência de solução do PVI, mas o facto de  $f$  não ser de classe  $C^1$  numa vizinhança de  $(0, 0)$  abre a possibilidade de que a unicidade de solução do PVI possa falhar.

4. Seja  $z(t) \geq 0$  é uma função real contínua tal que

$$z(t) \leq C + k \int_0^t z(s) ds, \quad (1)$$

para  $t \geq 0$ , onde  $C$  e  $k$  são constantes reais positivas. Prove a seguinte desigualdade:

$$z(t) \leq Ce^{kt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Esta proposição é uma versão simples da conhecida *desigualdade de Gronwall*, sendo muito usada na teoria qualitativa das equações diferenciais.

### Resolução

Considere-se a função  $v$  definida em  $[0, +\infty[$  pelo segundo membro de (1):

$$v(t) \stackrel{\text{def}}{=} C + k \int_0^t z(s) ds$$

Note que, por hipótese,  $z(t) \leq v(t)$ . Pelo teorema fundamental do cálculo,  $v$  é de classe  $C^1$  e a sua derivada é dada por:

$$v'(t) = kz(t) \leq kv(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Esta desigualdade é equivalente a:

$$v'(t) - kv(t) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-kt}v'(t) - ke^{-kt}v(t) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( e^{-kt}v(t) \right) \leq 0.$$

Isto significa que a função  $e^{kt}v(t)$  é decrescente em  $[0, \infty[$ ; em particular, para qualquer  $t \geq 0$ ,

$$e^{-kt}v(t) \leq v(0) = C.$$

Conclui-se então que  $v(t) \leq Ce^{kt}$ , pelo que:

$$z(t) \leq v(t) = Ce^{kt} \quad \text{para qualquer } t \geq 0.$$



5. Dados dois números reais,  $b_0$  e  $b_1$ , arbitrários, considere os problemas de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = b_0$$

e

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = b_1$$

e as respectivas soluções:

$$y_0(t) \quad \text{e} \quad y_1(t).$$

Suponha também que  $f$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  é limitada em  $\mathbb{R}^2$ .

Determine uma função  $\varphi(t)$  tal que

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq |b_1 - b_0| \varphi(t) \quad (2)$$

para todo o  $t \geq 0$ . Esta proposição mostra a *dependência contínua* das soluções do PVI da condição inicial.

**Sugestão:** Utilize a desigualdade de Gronwall (veja o problema anterior).

**Resolução:**

Dado que  $y_0(t)$  é solução do primeiro PVI então

$$y_0(t) = b_0 + \int_0^t f(s, y_0(s)) ds$$

e analogamente, sendo  $y_1(t)$  solução do segundo PVI,

$$y_1(t) = b_1 + \int_0^t f(s, y_1(s)) ds$$

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_0(t)| &= \left| b_1 + \int_0^t f(s, y_1(s)) ds - b_0 - \int_0^t f(s, y_0(s)) ds \right| \\ &\leq |b_1 - b_0| + \int_0^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| ds \end{aligned}$$

Visto  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K$  em  $\mathbb{R}^2$ , para certo  $K > 0$ , então pelo teorema de Lagrange existe  $c = c(s)$  (no intervalo de extremos  $y_1(s)$  e  $y_0(s)$ ) tal que:

$$|f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, c) \right| |y_1(s) - y_0(s)| \leq K |y_1(s) - y_0(s)| \quad (3)$$

A desigualdade (3) designa-se por **condição de Lipshitz** relativa a  $y$ ;  $K$  diz-se a **constante de Lipshitz** de  $f$ . Desta forma,

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq |b_1 - b_0| + K \int_0^t |y_1(s) - y_0(s)| ds$$

onde  $K$  é a constante de Lipschitz de  $f$ . Aplicando a desigualdade de Gronwall com  $C = |b_1 - b_0| > 0$  e  $z(t) = |y_1(t) - y_0(t)| \geq 0$ :

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq |b_1 - b_0| e^{Kt}.$$

Podemos assim tomar  $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{Kt}$  em (2).

6. Mostre que o problema de valor inicial (abrev. PVI)

$$x' = e^{\cos x}, \quad x(0) = 0$$

tem uma solução única definida em  $\mathbb{R}$ .

**Resolução:**

Considere-se  $f(t, x) = e^{\cos x}$ . Observa-se o seguinte

- $f(t, x)$  está definida e é contínua em  $\mathbb{R}^2$
- $\frac{\partial f}{\partial x} = -\text{sen } x e^{\cos x}$  está definida e é contínua em  $\mathbb{R}^2$
- A condição inicial  $(t_0, x_0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$

Tem-se então que as condições do teorema de Picard são verificadas em  $\mathbb{R}^2$  e, como tal, o PVI admite uma única solução,  $x_s(t)$ , definida para  $t$  numa vizinhança de 0. Para demonstrar que a solução está definida em  $\mathbb{R}$  vamos usar o teorema da extensão de soluções: esse teorema diz-nos que se o PVI satisfaz as condições do teorema de Picard então a solução única,  $x(t)$ , pode ser prolongada a um intervalo maximal,  $]a, b[$ . Esse intervalo será  $\mathbb{R}$  a não ser que a solução  $x(t)$  exploda quando  $t \rightarrow b^-$  (ou quando  $t \rightarrow a^+$ ).

Para mostrar que tal não pode acontecer vejamos em primeiro lugar que, para todo o  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|\cos x| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq f(t, x) \leq e.$$

Considere-se o PVI auxiliar

$$u' = c, \quad u(0) = 0,$$

(com  $c = 0$  ou  $c = e$ ) cuja solução é  $x(t) = ct$  (definida em  $\mathbb{R}$ ). Pelo teorema da comparação de soluções, e tendo em conta que  $0 \leq f(t, x) \leq e$ ,

$$0 \leq x(t) \leq et \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad et \leq x(t) \leq 0 \quad \forall t \leq 0$$

Mas isto mostra que

$$|x(t)| \leq e|t| \quad \forall t \in ]a, b[.$$

Por isso,  $x(t)$  não pode explodir, pelo que está definida em  $\mathbb{R}$ .

7. Considere o PVI

$$x' = \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad x(0) = 0.$$

Mostre que existe uma solução única definida em  $\mathbb{R}$ .

**Resolução:**

Considere-se  $f(t, x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ . Observa-se o seguinte

- $f(t, x)$  está definida e é contínua em  $\mathbb{R}^2$
- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$  está definida e é contínua em  $\mathbb{R}^2$
- A condição inicial  $(t_0, x_0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$

Tem-se então que as condições do teorema de Picard são verificadas em  $\mathbb{R}^2$  e, como tal, o PVI admite uma única solução definida,  $x(t)$ , definida para  $t$  numa vizinhança de 0. Atendendo a que

$$|f(t, x)| \leq 1, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

e procedendo como no problema anterior, o teorema da comparação de soluções mostra-nos que

$$|x(t)| \leq |t|$$

no intervalo onde  $x(t)$  está definida. Isto mostra que a solução não explode, pelo que está definida em  $\mathbb{R}$ .

8. Considere-se o problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2, \quad y(1) = 0$$

Mostre que existe  $\theta \in ]1, 1 + \frac{\pi}{2}]$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \theta} y(t) = +\infty$ , ou seja, a solução  $y(t)$  do PVI explode quando  $t \rightarrow \theta$ .

**Resolução:**

Temos, para  $t > 1$ ,  $\frac{dy}{dt} > y^2 + 1$  ou seja  $\frac{1}{y^2+1} \frac{dy}{dt} \geq 1$ . Integrando ambos os membros desta desigualdade entre 1 e  $t$ , obtém-se:

$$\operatorname{arctg}(y(t)) - \underbrace{\operatorname{arctg}(y(1))}_0 = t - 1$$

pois que  $\operatorname{arctg} y \geq t + c$ . Assim, a solução do PVI verifica

$$y(t) \geq \operatorname{tg}(t - 1).$$

Tendo em conta que  $\lim_{t \rightarrow 1 + \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(t - 1) = +\infty$ , então existe  $\theta \in ]1, 1 + \frac{\pi}{2}]$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \theta} y(t) = +\infty.$$

## 9. Considere o problema de valor inicial

$$x' = \frac{x \cos(t + x)}{1 + 2x^2}, \quad x(0) = 1$$

Mostre que o intervalo máximo de existência de solução é  $\mathbb{R}$ .

### Resolução:

A função  $f(t, x) = \frac{x \cos(t+x)}{1+2x^2}$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$  e é fácil de verificar que também  $\frac{\partial f}{\partial x}$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ . Pelo Teorema de Picard conclui-se que o PVI admite solução única numa vizinhança do valor inicial  $t_0 = 0$ . Estimando o módulo de  $f(t, x)$ :

$$|f(t, x)| = \left| \frac{x \cos(t+x)}{1+2x^2} \right| \leq \frac{|x|}{1+2x^2} \leq 1$$

Aplicando o teorema da comparação de soluções da forma usual, verifica-se que a solução  $x(t)$  do PVI satisfaz:

$$1 - t \leq x(t) \leq 1 + t \quad \forall t \geq 0$$

$$1 + t \leq x(t) \leq 1 - t \quad \forall t \leq 0$$

Isto prova que a solução não explode. Como o domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}^2$ , pelo teorema de extensão de soluções o intervalo máximo de existência é  $\mathbb{R}$ .

## 10. Mostre que o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

tem uma única solução  $y(t)$ , definida para  $t \in [0, +\infty[$ , e calcule  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ .

**Sugestão.** Não tente resolver a equação diferencial. Considere a função  $u(t)$  definida por

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Determine explicitamente a função  $u(t)$  e mostre que

$$\frac{dy}{dt} \geq \frac{1}{3(u(t))^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}}.$$

Depois, integre ambos os membros desta desigualdade entre 0 e  $t$ .

**Resolução:**

Definindo

$$f(t, y) = \frac{1}{3y^2 + (t+1)^{\frac{2}{3}}}$$

o domínio de  $f$  é

$$D = \left\{ (t, y) \in \mathbb{R}^2 : 3y^2 + (t+1)^{\frac{2}{3}} \neq 0 \right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (t, y) = (-1, 0) \right\}$$

Começemos por mostrar existência e unicidade de solução local. Verifica-se facilmente que tanto  $f$  como  $\partial f / \partial y$  são contínuas em  $D$ ; como também  $(t_0, y_0) = (0, 1) \in D$ , o teorema de Picard assegura existência de uma única solução local do PVI. Isto significa que a solução,  $y(t)$ , existe e é única para  $t \in ]-\beta, \beta[$ . Em particular, existe uma única solução,  $y(t)$ , do PVI no intervalo  $I = [0, \beta[$ . Falta mostrar que podemos tomar  $\beta = \infty$ , nesta última afirmação.

Pelo teorema de extensão de solução, basta mostrar que nem  $(t, y(t))$  converge para fronteira de  $D$  quando  $t \rightarrow \beta$ , nem  $|y(t)| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \beta$ , com  $\beta \in \mathbb{R}^+$ . Não conhecemos a solução do PVI; contudo, podemos usar o teorema de comparação de soluções.

Como estamos a estudar a solução para  $t \geq 0$ , e como não existe qualquer ponto fronteiro de  $D$  para  $t \geq 0$ , podemos desde já descartar a possibilidade de  $(t, y(t))$  atingir a fronteira de  $D$  quando  $t \rightarrow \beta$ .

Para verificar que a solução não explode, basta ter em conta que, para  $t \geq 0$ ,

$$3y^2 + (t+1)^{\frac{2}{3}} \geq 0 + 1^{\frac{2}{3}} = 1$$

Assim sendo,

$$0 \leq f(t, y) \leq 1 \quad (4)$$

para  $y \in \mathbb{R}$  e  $t \geq 0$ . Considerando os problemas de valor inicial (com  $c = 0$  ou  $c = 1$ )

$$\begin{cases} \dot{u} = c \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

cujas únicas soluções (em  $[0, +\infty[$ ) são dadas por  $u(t) = ct + 1$ . Usando as desigualdades (4) e o teorema de comparação de soluções, resulta que:

$$1 \leq y(t) \leq t + 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (5)$$

De (5) podemos concluir que

$y(t)$  não explode no extremo superior do intervalo máximo de solução;

$y(t) \geq 1$  para  $t \geq 0$ .

Desta forma, o teorema de extensão de solução diz-nos que a  $y(t)$  está definida no intervalo  $I = [0, +\infty[$ . Para calcular o limite de  $y(t)$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , consideremos o PVI auxiliar

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

A solução geral da equação separável  $3u^2 \frac{du}{dt} = 1$  é  $u^3 = t + c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ . Usando a condição inicial obtém-se  $u(t) = (t+1)^{\frac{1}{3}}$ , estando esta solução definida em  $[0, +\infty[$ . Tendo em conta que, para  $y \in \mathbb{R}$  e  $t \geq 0$ ,

$$f(t, y) = \frac{1}{3y^2 + (t+1)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{3y^3},$$

pelo teorema de comparação de soluções podemos concluir que

$$y(t) \leq u(t) = (t+1)^{\frac{1}{3}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Mas então:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3(y(t))^2 + (t+1)^{\frac{2}{3}}} \geq \frac{1}{3(u(t))^2 + (t+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4(t+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4}(t+1)^{-\frac{2}{3}}$$

Integrando ambos os membros desta desigualdade entre 0 e  $t$ , obtém-se

$$y(t) - \underbrace{y(0)}_1 \geq \frac{1}{4} \int_0^t (s+1)^{-\frac{2}{3}} ds = \frac{3}{4} (s+1)^{\frac{1}{3}} \Big|_0^t = \frac{3}{4} (t+1)^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4},$$

ou seja,

$$y(t) \geq \frac{3}{4}(t+1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

Podemos assim concluir que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty.$$