

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiom, LEBiol

Ficha de Problemas nº 5

Existência, unicidade, prolongamento e comparação de soluções

1. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

$$(a) \ y' = \frac{ty}{1+t^2} \quad (b) \ y' = (2-y)(y-1) \quad (d) \ y' = \frac{y+t}{y-t}$$

2. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^{1/2} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

3. Majorando e minorando as seguintes equações, obtenha estimativas para os intervalos máximos de definição dos problemas de valor inicial indicados.

$$(a) \ \frac{dy}{dt} = \arctg(ty), \ y(0) = 2 \quad (b) \ \frac{dy}{dt} = \frac{e^{\cos(ty)}}{y^3}, \ y(0) = 1$$

$$(c) \ \frac{dy}{dt} = y^2 e^y, \ y(0) = 1$$

Nota: Em (c), a função constante igual a 0 é uma solução da equação.

4. Determine o limite quando $t \rightarrow \infty$ da solução do problema de valor inicial

$$\left(e^y + \operatorname{sen}^4 y \right) y' = y - y^4, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

5. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y \frac{dy}{dt} = 1 - y^2 \\ y(1/2) = 2, \end{cases}$$

- (a) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema numa vizinhança suficientemente pequena de $\frac{1}{2}$ onde esteja definida.
- (b) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em \mathbb{R} .
- (c) Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.

6. Considere o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y + e^{-(t+y^4)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- (a) Mostre que o problema tem solução única definida numa vizinhança de $0,] - \alpha, \alpha[$.
- (b) Mostre que o intervalo máximo de solução do problema contém $[0, \infty[$ e determine $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.
- (c) Escreva uma equação integral que é equivalente ao P.V.I. para $y \in C^1(] - \alpha, \alpha[)$.

7. Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t + e^y)$$

- (a) Justifique que a solução de qualquer problema de valor inicial $y(t_0) = y_0$ é única.
- (b) Mostre que a solução do problema de valor inicial $y(0) = 0$ satisfaz $-t \leq y(t) \leq t$ para $t \geq 0$.
- (c) Mais geralmente, mostre que

$$|y(t) - y_0| \leq |t - t_0| \quad \forall t$$

- (d) Conclua que o intervalo máximo de definição de qualquer das soluções desta equação é \mathbb{R} .

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(t, 0) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e

$$|f(t, y) - f(t, x)| \leq \frac{1}{2}|y - x| \quad , \quad \text{para todos os } (t, x), (t, y) \in \mathbb{R}^2$$

Considere o problema de valor inicial $y' = -y + f(t, y)$, com $y(0) = 1$.

- (a) Mostre que este problema tem solução única numa vizinhança de $t = 0$.
 - (b) Mostre que o intervalo máximo de existência de solução é \mathbb{R} .
 - (c) Indique o valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.
9. (a) Se $x(t)$ é a solução de uma equação diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$, determine uma equação satisfeita pela função $y(t) = x(-t)$.

(b) Mostre que todas as soluções da equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{sen}(tx) + t^3$$

são funções pares (quando prolongadas ao seu intervalo máximo de definição).

10. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1 + y^2) \quad , \quad y(1) = 0 \quad (1)$$

- (i) Determine a solução de (1) e indique o seu intervalo máximo de solução.
(ii) Considere agora o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1 + y^2)e^y \quad , \quad y(1) = 0$$

- (a) Sem tentar resolver a equação, justifique que o problema tem localmente uma e uma só solução.
(b) Mostre que o intervalo máximo de existência de solução é limitado superiormente, isto é, existe $\beta > 1$ tal que $\lim_{t \rightarrow \beta^-} y(t) = \pm\infty$.

Sugestão: Comece por mostrar que a solução é uma função crescente para $t > 1$, e relacione com o problema (1).

Soluções

1. Ver resoluções na ficha 5 de exercícios resolvidos.

2. Com a solução de equilíbrio $y(x) \equiv 0$ e a solução geral $y_c(x) = \frac{(x+c)^2}{4}$, $c \in \mathbb{R}$, podemos definir uma infinidade de soluções do (PVI):

– para $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$

$$y_\alpha^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \alpha \\ \frac{(x-\alpha)^2}{4} & \text{se } x > \alpha \end{cases}$$

– para $\alpha \in \mathbb{R}_0^-$

$$y_\alpha^-(x) = \begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2}{4} & \text{se } x < \alpha \\ 0 & \text{se } x \geq \alpha \end{cases}$$

3. (a) $I_{\text{Max}} = \mathbb{R}$ (b) $I_{\text{Max}} =]\alpha, +\infty[$ em que $\alpha \in [-e/4, -e^{-1}/4]$
(c) $I_{\text{Max}} =]-\infty, \alpha[$ em que $\alpha \in]0, e^{-1}[$

4. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$

5. (a) $y(t) = \sqrt{1 + 12(1-t)^2}$

(b) Com a solução do (PVI) $y(t) = \sqrt{1 + 12(1-t)^2}$ e a solução geral $y(t) = \sqrt{1 - c(1-t)^2}$, $c \in \mathbb{R}$ podemos definir uma infinidade de soluções do (PVI) definidas em \mathbb{R} por

$$y_c(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + 12(1-t)^2} & \text{se } t \leq 1 \\ \sqrt{1 - c(1-t)^2} & \text{se } t > 1 \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}$$

6. (b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$

8. (c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$

9. (a) $\frac{dy}{dt} = -f(-t, y(t))$

10. (i) $y(t) = \text{tg} \frac{t^2 - 1}{2}$, e $I_{\text{Max}} =]-\sqrt{\pi + 1}, \sqrt{\pi + 1}[$.