TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 4

Equações Vectoriais de 1ª Ordem (Caso não Homogéneo) e Equações Lineares de Ordem n (Caso Homogéneo)

1 Exercícios Resolvidos

1. Determine e^{At}, onde A é a matriz:

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ **(d)** $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Resolução:

(a) A matriz A é uma matriz diagonal, pelo que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}.$$

(b) A matriz A é uma matriz triangular superior. A equação vectorial $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, com $\mathbf{y}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, é equivalente ao sistema de equações diferenciais lineares:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3x + 4y \\ z' = 4x + 4y + 4z \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de equações lineares por substituição sucessiva (começando pela primeira equação) obtém-se:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ -\frac{3}{2}ae^{2t} + be^{4t} \\ ae^{2t} + 4bte^{4t} + ce^{4t} \end{bmatrix} \qquad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Escrevendo a solução na forma $\mathbf{X}(t) = S(t)C$, em que C é um vector coluna de constantes (i.e., um vector arbitrário de $\mathbb{R}^3$)

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

obtém-se uma matriz solução fundamental (MSF) de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$:

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Calculando a MSF em $t = 0$

$$S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned} e^{At} &= S(t)S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{4t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} + 6te^{4t} - e^{4t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) Começamos por calcular uma matriz solução fundamental de A. Escrevendo $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ na forma de sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + 7y \end{cases}$$

A partir da primeira equação, $y = \frac{x - x'}{3}$; substituindo então y na segunda equação, ficamos com

$$x'' - 8x' + 16x = 0,$$

cuja solução geral é

$$x(t) = ae^{4t} + bte^{4t}.$$

Como tal,

$$y(t) = -e^{4t}\left(a + \frac{b}{3} + bt\right).$$

Uma matriz solução fundamental calcula-se a partir de:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{4t}\begin{bmatrix} a + bt \\ -a - \frac{b}{3} - bt \end{bmatrix} = \underbrace{e^{4t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & -\frac{1}{3} - t \end{bmatrix}}_{S(t)}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = e^{4t}\begin{bmatrix} 1 - 3t & -3t \\ 3t & 1 + 3t \end{bmatrix}$$

(d) Começamos por calcular uma matriz solução fundamental de A. Escrevendo $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ na forma de sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = -5x + 3y \end{cases}$$

A partir da primeira equação, $y = \frac{x'+3x}{2}$; substituindo então y na segunda equação, ficamos com

$$x'' + x = 0,$$

cuja solução geral é

$$x(t) = a\cos t + b \operatorname{sen} t.$$

Como tal,

$$y(t) = \frac{1}{2}\Big((-a + 3b)\operatorname{sen} t + (b + 3a)\cos t\Big).$$

Uma matriz solução fundamental calcula-se a partir de:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos t + b\operatorname{sen} t \\ \frac{1}{2}\Big((-a + 3b)\operatorname{sen} t + (b + 3a)\cos t\Big) \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos t & 2\operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t + 3\cos t & \cos t + 3\operatorname{sen} t \end{bmatrix}}_{S(t)}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Como a inversa de $S(t)$ em $t = 0$ é

$$S^{-1}(0) = 2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

tem-se então que:

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \cos t - 3\operatorname{sen} t & 2\operatorname{sen} t \\ -5\operatorname{sen} t & 3\operatorname{sen} t + \cos t \end{bmatrix}$$

(e) Escrevendo a equação vectorial $Y' = AY$ na forma de sistema:

$$\begin{cases} x' = 3x + z \\ y' = 2x + y + z \\ z' = -4x - z \end{cases}$$

Notando que a primeira e terceira equações só mencionam x e z, começamos por resolvê-las a fim de determinar as soluções $x(t)$ e $z(t)$; ou seja:

$$\begin{cases} x' = 3x + z \\ z' = -4x - z \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação em ordem a z obtemos

$$z = x' - 3x \tag{1}$$

Substituindo na segunda obtém-se

$$(x' - 3x)' = -4x - x' + 3x \quad \Leftrightarrow \quad x'' - 2x' + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D-1)^2 x = 0$$

pelo que

$$x(t) = (a + bt)e^t$$

Substituindo em (1)

$$z(t) = x' - 3x = (a + b + bt)e^t - 3(a + bt)e^t = (b - 2a - 2bt)e^t$$

Vamos agora substituir $x(t)$ e $z(t)$ na segunda equação do sistema e resolvê-la em ordem a y:

$$y' - y = 2x + z = (2a + 2bt)e^t + (b - 2a - 2bt)e^t = be^t \quad \Leftrightarrow \quad (D-1)y = be^t$$

Aplicando o polinómio aniquilador, $P_A(D) = (D-1)$ a ambos os membros da equação anterior, obtém-se $(D-1)^2 y = 0$. Assim sendo, um candidato a solução particular é $y_p(t) = dte^t$; substituindo y_p na equação $y' - y = be^t$ obtém-se $de^t = be^t$, ou seja, $d = b$. Assim sendo:

$$y(t) = ce^t + bte^t = (c + bt)e^t$$

Tem-se então que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+bt)e^t \\ (c+bt)e^t \\ (b-2a-2bt)e^t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & t & 1 \\ -2 & 1-2t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

A matriz

$$S(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & t & 1 \\ -2 & 1-2t & 0 \end{bmatrix}$$

é uma (MSF) associada à equação $Y' = AY$. Calculando-a em $t = 0$, obtém-se

$$S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq Id_3 \qquad \text{e} \qquad S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & t & 1 \\ -2 & 1-2t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2t+1 & 0 & t \\ 2t & 1 & t \\ -4t & 0 & 1-2t \end{bmatrix}$$

2. Sabendo que

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & -e^{3t} \end{bmatrix}$$

é uma matriz fundamental para o sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, onde A é um matriz constante, determine

(a) e^{At}

(b) $\left.\dfrac{d}{dt}e^{At}\right|_{t=0}$

(c) A matriz A.

(d) Uma solução particular de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) Começamos por calcular

$$S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resulta então que:

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & -e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t}+e^{3t} & e^{2t}-e^{3t} \\ e^{2t}-e^{3t} & e^{2t}+e^{3t} \end{bmatrix}$$

(b) Usando a definição de derivada de uma função matricial,

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} (e^{2t}+e^{3t})' & (e^{2t}-e^{3t})' \\ (e^{2t}-e^{3t})' & (e^{2t}+e^{3t})' \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2e^{2t}+3e^{3t} & 2e^{2t}-3e^{3t} \\ 2e^{2t}-3e^{3t} & 2e^{2t}+3e^{3t} \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\left.\frac{d}{dt}e^{At}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(c) Por definição a matriz $X(t) = e^{At}$ satisfaz o PVI

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) & \text{para } t \in \mathbb{R} \\ X(0) = I \end{cases}$$

Escrevendo a equação diferencial para $t = 0$ obtém-se $\frac{d}{dt}e^{At}\Big|_{t=0} = X'(0) = AX(0) = A$. Desta forma, usando o resultado da alínea (b):

$$A = \frac{d}{dt}e^{At}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Mais genericamente, se $S(t)$ é uma matriz fundamental de um equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ (não necessariamente igual à exponencial de At) ainda assim $S'(t) = AS(t)$ e $S(t)$ é invertível, para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Assim sendo, $A = S'(t)S^{-1}(t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$; em particular:

$$A = S'(0)S^{-1}(0).$$

Esta fórmula permite recuperar A a partir de qualquer MSF de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$; pode, por exemplo, ser usada como verificação de um cálculo de $S(t)$.

(d) Pela fórmula da variação das constantes

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_p(t) &= e^{At}\int e^{-At}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\
&= e^{At}\int \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-3t} & e^{-2t}-e^{-3t} \\ e^{-2t}-e^{-3t} & e^{-2t}+e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\
&= \frac{1}{2}e^{At}\int \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix} dt \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{2t}+e^{3t} & e^{2t}-e^{3t} \\ e^{2t}-e^{3t} & e^{2t}+e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine e^{At}.

(b) Resolva o problema de valor inicial:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(c) Sendo $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma solução arbitrária de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, determine $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbf{y}(t)$.

Resolução:

(a) Vamos determinar a solução geral do sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, com $\mathbf{y}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$:

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$$

A primeira equação é equivalente a $y = x' + x$. Substituindo na segunda equação, obtém-se

$$(x' + x)' = -x - 3(x' + x) \Leftrightarrow x'' + 4x' + 4 = 0 \Leftrightarrow (D+2)^2 x = 0,$$

pelo que $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Substituindo na primeira equação, obtém-se

$$y(t) = x'(t) + x(t) = -c_1 e^{-2t} + c_2(1-t)e^{-2t}.$$

Desta forma,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t}(c_1 + c_2 t) \\ e^{-2t}(-c_1 + c_2(1-t)) \end{bmatrix} = \underbrace{e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & 1-t \end{bmatrix}}_{S(t)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

pelo que $S(t)$ é uma matriz solução fundamental de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Resulta então que:

$$\begin{aligned} e^{At} = S(t)S^{-1}(0) &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolução alternativa:

A matriz A tem um único valor próprio, dado por:

$$\det(A - \lambda I) = (-1-\lambda)(-3-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -2$$

O vector próprio associado é solução não nula de

$$\begin{aligned} (A + 2I)\mathbf{v} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad b = -a \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = (a, -a) = a(1, -1), \end{aligned}$$

com $a \in \mathbb{R}$, pelo que podemos escolher $\mathbf{v}_p = (1, -1)$ como vector próprio. Como não existem dois vectores próprios linearmente independentes associados ao único valor próprio de A, a matriz não é diagonalizável. Prosseguimos então com o cálculo de um vector próprio generalizado:

$$
\begin{aligned}
(A + 2I)\mathbf{v} = \mathbf{v}_p \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad a = 1 - b \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = (1 - b, b) = (1, 0) - b(1, -1).
\end{aligned}
$$

Podemos então tomar $\mathbf{v}_g = (1, 0)$.

A matriz A é então semelhante a uma matriz de Jordan $A = SJS^{-1}$, com

$$
J = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Por fim:

$$
\begin{aligned}
e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 + t & t \\ -t & 1 - t \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(b) Usando a fórmula da variação das constantes:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= e^{At} \left(\mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{-As} e^{-2s} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ds \right) \\
&= e^{At} \left(\mathbf{y}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 - s & -s \\ s & 1 + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ds \right) \\
&= e^{At} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ds \right) \\
&= e^{At} \begin{bmatrix} 1 + t \\ -1 - t \end{bmatrix} \\
&= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 + t & t \\ -t & 1 - t \end{bmatrix} (1 + t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= (1 + t)e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Resolução alternativa:

O polinómio característico da matriz A é $P(\lambda) = (\lambda + 2)^2$. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton tem-se que a matriz A verifica a equação dos valores próprios, isto é

$$
P(A) = (A + 2Id)^2 = 0\,,
$$

e sendo assim a matriz $A+2Id$ é uma matriz nilpotente e a série da exponencial é uma série finita (neste caso tem apenas 2 termos). Então

$$e^{At} = e^{(-2Id+A+2Id)t} = e^{-2Id\,t+(A+2Id)t}.$$

Dado que as matrizes $-2Id$ e $A+2Id$ comutam, tem-se então que

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{-2Id\,t}e^{(A+2Id)t} = e^{-2t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A+2Id)^n t^n}{n!} \\ &= e^{-2t}\Big(Id+(A+2Id)t\Big) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) A solução geral da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ é:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{At}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix} c_1+(c_1+c_2)t \\ c_2-(c_1+c_2)t \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + (c_1+c_2)te^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Como $\lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0$ e $\lim_{t\to+\infty} te^{-2t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{2t}} = 0$, então $\lim_{t\to+\infty}\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

4. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule e^{At}.

(b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \\ \\ \mathbf{y}(1) = (1,1,1) \end{cases}$$

onde $\mathbf{h}(t) = (0, 2e^t, e^t)$.

Resolução:

(a) Tendo em conta que A é uma matriz na forma canónica de Jordan (com dois blocos de Jordan):

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

(b) Utilizando a fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + \int_1^t e^{A(t-s)}\,\mathbf{h}(s)\,ds \\
&= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + \int_1^t e^{t-s} \begin{bmatrix} 1 & t-s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^s \\ e^s \end{bmatrix} ds \\
&= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \int_1^t e^{-s} \begin{bmatrix} 1 & t-s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^s \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ds \\
&= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \int_1^t \begin{bmatrix} 2t-2s \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ds \\
&= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \begin{bmatrix} \int_1^t (2t-2s)\,ds \\ \int_1^t 2ds \\ \int_1^t ds \end{bmatrix} = e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \begin{bmatrix} (2ts-s^2)\big|_{s=1}^t \\ 2s\big|_{s=1}^t \\ s\big|_{s=1}^t \end{bmatrix} \\
&= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \begin{bmatrix} 2t^2-t^2-2t+1 \\ 2t-2 \\ t-1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para concluir o cálculo, resta calcular a primeira parcela:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= e^{t-1} \begin{bmatrix} 1 & t-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} t^2-2t+1 \\ 2t-2 \\ t-1 \end{bmatrix} \\
&= e^{t-1} \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} (t-1)^2 \\ 2(t-1) \\ t-1 \end{bmatrix} \\
&= e^{t-1} \begin{bmatrix} t+e(t-1)^2 \\ 2e(t-1) \\ e(t-1) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(0) = (0,0,0,0) \end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea.

(b) Sendo $\mathbf{y}(t) = \big(y_1(t),\, y_2(t),\, y_3(t),\, y_4(t)\big)$ a solução do problema não homogéneo, determine $y_2(3)$.

Resolução:

(a) Visto a matriz A ser da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

temos que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{bmatrix}$$

o que facilita bastante os cálculos. Comecemos por calcular $e^{A_1 t}$ tendo em conta que $A_1 = -2I + N$, onde

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad N^2 = 0,$$

então $e^{-2It} = e^{-2t}I$ e

$$e^{Nt} = I + tN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $(-2I)N = N(-2I)$ então:

$$e^{A_1 t} = e^{-2It}e^{Nt} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora calcular $e^{A_2 t}$. Os valores próprios de A_2 são $1+2i$ e $1-2i$ associados (respectivamente) aos vectores próprios $\mathbf{v}_1 = (1, i)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, -i)$. Sendo assim

$$A_2 \;=\; S\Lambda S^{-1} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix} \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

e, consequentemente,

$$e^{A_2 t} \;=\; S e^{\Lambda t} S^{-1} \;=\; \frac{e^t}{2i}\begin{bmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2it} & 0\\ 0 & e^{-2it}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i & 1\\ i & -1\end{bmatrix} \;=\; e^t\begin{bmatrix}\cos(2t) & \operatorname{sen}(2t)\\ -\operatorname{sen}(2t) & \cos(2t)\end{bmatrix}$$

Finalmente

$$e^{At} \;=\; \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0\\ 0 & e^{A_2 t}\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0\\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^t\cos(2t) & e^t\operatorname{sen}(2t)\\ 0 & 0 & -e^t\operatorname{sen}(2t) & e^t\cos(2t)\end{bmatrix}$$

e a solução geral da equação vectorial homogénea é dada por

$$\mathbf{y}(t) \;=\; e^{At}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} c_1\, e^{-2t}\\ 3c_1\, te^{-2t} + c_2\, e^{-2t}\\ c_3\, e^t\cos(2t) + c_4\, e^t\operatorname{sen}(2t)\\ -c_3\, e^t\operatorname{sen}(2t) + c_4\, e^t\cos(2t)\end{bmatrix}$$

com $(c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4$.

(b) Pela fórmula da variação das constantes, a solução do problema de valor inicial dado será

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) \;&=\; e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s)\,ds\\
&=\; \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0\\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^t\cos(2t) & e^t\operatorname{sen}(2t)\\ 0 & 0 & -e^t\operatorname{sen}(2t) & e^t\cos(2t)\end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix}0\\ 2e^{2s}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} ds\\
&=\; \begin{bmatrix}0\\ 1-e^{-2t}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Resulta pois que $y_2(t) = 1 - e^{-2t}$, pelo que:

$$y_2(3) = 1 - e^{-6}.$$

6. (a) Determine a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x' = x - y\\ y' = 2x - y\end{cases}$$

que satisfaz a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = 1$.

(b) Considerando agora o sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \\ z' = y - (\operatorname{sen} t)z \end{cases}$$

utilize a alínea anterior para determinar a solução que verifica a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = z(0) = 1$.

Resolução:

(a) Resolvendo a segunda equação em ordem a x obtém-se

$$x = \frac{y' + y}{2} \tag{2}$$

Substituindo na primeira equação

$$\left(\frac{y'+y}{2}\right)' = \frac{y'+y}{2} - y \quad \Leftrightarrow \quad y'' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2+1)y = 0$$

O polinómio característico associad te raízes complexas conjugadas $\pm i$ (com multiplicidade 1 cada), e assim uma base complexa para o espaço de soluções é

$$\mathcal{B}_c = \{e^{it},\, e^{it}\}$$

e uma base real será

$$\mathcal{B}_= \{\cos t,\, \operatorname{sen} t\}$$

pelo que

$$y(t) = a\cos t + b\operatorname{sen} t \quad , \quad a,\, b \in \mathbb{R}$$

Substituindo em (2) obtemos

$$x(t) = \frac{1}{2}(y' - y) = \frac{e^{2t}}{2}\Big((a+b)\cos t + (b-a)\operatorname{sen} t\Big)$$

Entáo

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (a+b)\cos t + (b-a)1sent \\ 2a\cos t + 2b\operatorname{sen} t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t & \cos t + \operatorname{sen} t \\ 2\cos t & 2\operatorname{sen} t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

A matriz

$$S(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t & \cos t + \operatorname{sen} t \\ 2\cos t & 2\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

é uma (MSF) para a equação $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$. Dado que

$$S(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq Id_2$$

tem-se que

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t & \cos t + \operatorname{sen} t \\ 2\cos t & 2\operatorname{sen} t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t & \cos t - \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

pelo que a solução pedida é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ 2\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

(b) Dado que nas duas primeiras equações não há dependência em z podemos concluir de imediato por (i) que

$$x(t) = \operatorname{sen} t + \cos t \qquad \text{e} \qquad y(t) = 2\operatorname{sen} t$$

Falta então determinar z, ou seja resolver o PVI

$$z' = 2\operatorname{sen} t - (\operatorname{sen} t)z \quad , \quad z(0) = 1$$

Trata-se de uma equação linear, de factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int \operatorname{sen} t\, dt} = e^{-\cos t}$$

Então, a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\cos t}z\right) = 2\operatorname{sen} t e^{-\cos t} \;\Leftrightarrow\; e^{-\cos t}z = 2e^{-\cos t} + c \;\Leftrightarrow\; z(t) = 2 + ce^{\cos t}$$

Dado que $z(0) = 1$, conclui-se

$$z(t) = 2 - e^{\cos t - 1}$$

7. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

   (a) O polinómio diferencial $D^4(D+1)^2$ é um polinómio aniquilador das funções te^{-t} e t^3

   (b) $e^{\lambda t}v$ é solução do sistema $Y' = AY$, quaisquer que sejam o vector v e o escalar λ

   (c) $e^{At}v$ é solução do sistema $Y' = AY$, qualquer que seja o vector v

   (d) Se $S(t)$ é uma matriz fundamental do sistema $Y' = AY$, então $S^{-1}(t)$ é solução do sistema $Y' = -YA$

Resolução:

(a) Verdadeira. O polinómio aniquilador, $P(D)$, de uma função $f(t)$ é um polinómio diferencial tal que $P(D)f(t) = 0$. Podemos verificar directamente:

$$D^4(t^3) = 0 \quad , \quad D^3(t^3) = 6 \neq 0$$

e

$$(D+1)^2(te^{-t}) = (te^{-t})'' + 2(te^{-t})' + te^{-t} = 0 \quad , \quad (D+1)(te^{-t}) = e^{-t} \neq 0$$

(b) Falsa. O resultado é verdadeiro sse λ for valor próprio de A associado ao vector próprio v.

(c) Verdadeira. Observe-se que sendo $Y = e^{At}v$

$$Y' = \left(e^{At}v\right)' = Ae^{At}v = AY$$

(d) Verdadeira - Dado que $S(t)S^{-1}(t) = Id$ para todo $t \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\left(S(t)S^{-1}(t)\right)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S'(t)S^{-1}(t) + S(t)\left(S^{-1}(t)\right)' = 0$$

Visto $S(t)$ ser uma (MSF) associada à equação $Y' = AY$, tem-se que $S'(t) = AS(t)$. Substituindo

$$AS(t)S^{-1}(t) + S(t)\left(S^{-1}(t)\right)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(S^{-1}(t)\right)' = -S^{-1}(t)A$$

8. Determine a solução geral das seguintes equações

(a) $y'' + y = 2e^t + t^2$

(b) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3t} + \frac{e^{3t}}{t}$, para $t > 0$.

(c) $y'' + 4y = \operatorname{sen} 2t$

Resolução:

(a) O polinómio característico da equação homogénea associada,

$$y'' + y = 0,$$

é $P(r) = r^2 + 1 = (r-i)(r+i)$, cujas raízes são $\pm i$ (ambas com multiplicidade 1). Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como os polinómios aniquiladores de e^t e de t^2 são, respectivamente, $D-1$ e D^3, então o polinómio aniquilador de $b(t)=2e^t+t^2$ é

$$P_A(D)=(D-1)D^3.$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$P_A(D)(D-i)(D+i)y=P_A(D)\big(2e^t+t^2\big)=0,$$

ou seja,

$$(D-1)D^3(D-i)(D+i)y=0.$$

A solução geral desta equação é

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t}_{\substack{\shortparallel \\ y_G(t)}}+a+bt+ct^2+de^t \\ &= y_G(t)+a+bt+ct^2+de^t \end{aligned}$$

para certos $c_1,c_2,a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$y''+y=2e^t+t^2 \tag{3}$$

da forma $y_p(t)=a+bt+ct^2+de^t$. Como

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= b+2ct+de^t \\ y_p''(t) &= 2c+de^t \end{aligned}$$

substituindo estas expressões na equação (3), obtemos

$$2c+de^t+a+bt+ct^2+de^t=t^2+2e^t, \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

Esta equação é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a+2c=0 \\ b=0 \\ c=1 \\ 2d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=1 \\ d=1 \end{cases}$$

Assim $y_p(t)=-2+t^2+e^t$ é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (6) é

$$y(t)=c_1e^t\cos t+c_2e^t\operatorname{sen} t-2+t^2+e^t, \qquad \text{com} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

(b) O polinómio característico da equação homogénea associada,

$$y''-6y'+9y=0,$$

é $P(r) = r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2$, que tem uma única raiz, $r = 3$, com multiplicidade 2. Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dado que $\frac{e^{3t}}{t}$ não é combinação linear de funções que sejam soluções de equações lineares homogéneas, vamos usar a fórmula da variação das constantes para determinar uma solução particular de

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^{3t} + \frac{1}{t}e^{3t} \tag{4}$$

Para esta equação, a matriz wronskiana é

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & (1+3t)e^{3t} \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & 1+3t \end{bmatrix}$$

e a sua inversa é, então, relativamente fácil de calcular:

$$W^{-1}(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & 1+3t \end{bmatrix}^{-1} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1+3t & -t \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando a fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \end{bmatrix} \int W^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 4e^{3t} + \frac{1}{t}e^{3t} \end{bmatrix} dt \\
&= e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \int e^{-3t} \begin{bmatrix} 1+3t & -t \\ -3 & 1 \end{bmatrix} e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 + \frac{1}{t} \end{bmatrix} dt \\
&= e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} -4t - 1 \\ 4 + \frac{1}{t} \end{bmatrix} dt \\
&= e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2t^2 - t \\ 4t + \log t \end{bmatrix} \\
&= e^{3t}\big(-2t^2 - t + 4t^2 + t\log t \big) \quad = \quad \big(2t^2 + t\log t\big)e^{3t} - te^{3t}
\end{aligned}$$

A solução geral da equação (4) é, então (para $t > 0$):

$$y(t) = y_G(t) + y_p(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + \big(2t^2 + t\log t\big)e^{3t}, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Note que o termo $-te^{3t}$ da solução particular pode, obviamente, ser absorvido pelo termo $c_2 t e^{3t}$ de $y_G(t)$.

(c) O polinómio característico da equação homogénea associada,

$$y'' + 4y = 0,$$

é $P(r) = r^2 + 4 = (r - 2i)(r + 2i)$, cujas raízes são $\pm 2i$ (ambas com multiplicidade 1). Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

O polinómio aniquilador de $b(t) = \operatorname{sen} 2t$ é

$$P_A(D) = (D - 2i)(D + 2i)$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$P_A(D)(D - 2i)(D + 2i)y = P_A(D) \operatorname{sen} 2t = 0,$$

ou seja,

$$(D - 2i)^2(D + 2i)^2 y = 0.$$

Como várias raízes do polinómio característico da equação homogénea (neste caso, todas) coincidem com raízes do polinómio aniquilador, trata-se de uma **equação diferencial linear com ressonância**.

A solução geral da equação anterior é

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t}_{\substack{\shortparallel \\ y_G(t)}} + at \cos 2t + bt \operatorname{sen} 2t \\ &= y_G(t) + at \cos 2t + bt \operatorname{sen} 2t \end{aligned}$$

para certos $c_1, c_2, a, b \in \mathbb{R}$. Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$y'' + 4y = \operatorname{sen} 2t \tag{5}$$

da forma $y_p(t) = at \cos 2t + bt \operatorname{sen} 2t$. Como

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= (a + 2bt) \cos 2t + (b - 2at) \operatorname{sen} 2t, \\ y_p''(t) &= 4(b - at) \cos 2t + 4(-a - bt) \operatorname{sen} 2t, \end{aligned}$$

substituindo estas expressões na equação (5), obtemos

$$4b \cos 2t - 4a \operatorname{sen} 2t = \operatorname{sen} 2t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 4b = 0 \\ -4a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Assim $y_p(t) = -\frac{1}{4}\, t \cos 2t$ é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (5) é

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{4}\, t \cos 2t, \qquad \text{com} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Comparando as soluções da equação homogénea com as da não homogénea, vê-se que o efeito da ressonância (provocada pelo termo não homogéneo, $b(t) = \operatorname{sen} 2t$) é o aparecimento de oscilações de amplitude crescente, na solução.

9. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 8t + 2e^{2t} \\ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

(a) Escreva e resolva a equação homogénea associada.
(b) Determine uma solução particular da equação diferencial.
(c) Resolva o problema de valor inicial.

Resolução:

(a) A equação homogénea associada é

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

O seu polinómio característico, $P(R) = R^2 - 4R + 4 = (R-2)^2$, tem uma única raiz, $R = 2$, com multiplicidade 2. Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t},$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) O aniquilador de $b(t) = 8t + 2e^{2t}$ é

$$P_A(D) = D^2(D-2)$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$P_A(D)(D-2)^2 y = P_A(D)\big(8t + 2e^{2t}\big) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad D^2(D-2)^3 y = 0$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 t^2 e^{2t} + c_4 + c_5 t \\ &= y_G(t) + c_3 t^2 e^{2t} + c_4 + c_5 t \end{aligned}$$

para certos $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$. Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$(D-2)^2 y = 8t + 2e^{2t} \tag{6}$$

da forma $y_p(t) = c_3 t^2 e^{2t} + c_4 + c_5 t$. Substituindo esta expressão na equação (6), obtemos

$$2c_3 e^{2t} + 4c_4 - 4c_5 + 4c_5 t = 8t + 2e^{2t}, \qquad \text{para qualquer } \ t \in \mathbb{R},$$

o que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2c_3 = 2 \\ 4c_4 - 4c_5 = 0 \\ 4c_5 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = 1 \\ c_4 = 2 \\ c_5 = 2 \end{cases}$$

Assim $y_p(t) = t^2e^{2t} + 2 + 2t$ é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (6) é

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + t^2e^{2t} + 2 + 2t, \qquad \text{com} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Como $y'(t) = 2c_1e^{2t} + c_2(1+2t)e^{2t} + (2t+2t^2)e^{2t} + 2$, resulta das condições iniciais que:

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 + 2 \\ 2 = y'(0) = 2c_1 + c_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = (-1 + 2t + t^2)e^{2t} + 2 + 2t.$$

10. Determine a solução da equação diferencial

$$y'' - 4y' + 3y = (1 + e^{-x})^{-1}$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 1$

Resolução:

A solução da equação é da forma

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

sendo y_g a solução geral da equação homogénea associada e y_p uma solução particular da equação completa. Começemos por calcular y_g. As raízes do polinómio característico associado são

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ou } r = 3$$

Sendo assim, e^x e e^{3x} são duas soluções linearmente independentes da equação homogénea, pelo que

$$y_g(t) = c_1e^x + c_2e^{3x}$$

Para calcular y_p, note que somos forçados a utilizar a fórmula da variação das constantes, pois o termo não homogéneo,

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

não é solução de qualquer equação diferencial linear de coeficientes constantes. Assim sendo,

$$y_p(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \int^x W^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^{-s}} \end{bmatrix} ds$$

em que $W(x)$ é a matriz Wronskiana associada:

$$W(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \int^x \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-s} & -e^{-s} \\ -e^{-3s} & e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^{-s}} \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \int^x \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{e^{-s}}{1+e^{-s}} \\ \frac{e^{-3s}}{1+e^{-s}} \end{bmatrix} ds \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log(1+e^{-x}) \\ -\frac{e^{-2x}}{2} + e^{-x} - \log(1+e^{-x}) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^x \log(1+e^{-x}) - \frac{e^x}{2} + e^{2x} - e^{3x}\log(1+e^{-x}) \right) \\
&= \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^x}{4} + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log(1+e^{-x})
\end{aligned}$$

onde calculámos a primitiva de $\frac{e^{-3s}}{1+e^{-s}}$ fazendo a substituição $e^{-s} = t$. Assim sendo, a solução geral da equação é:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + \underbrace{\left(\tilde{c}_2 - \tfrac{1}{4}\right)}_{\overset{\shortparallel}{c_2}} e^{3x} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log(1+e^{-x})$$

Dado que $y(0) = y'(0) = 1$, tem-se que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 1 \\ c_1 + 3c_2 + 1 - \log 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \\ c_1 + 3c_2 = \log 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\log 2 \\ c_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log 2 \end{cases}$$

pelo que

$$y(x) = \frac{3e^x - e^{3x}}{4} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)$$

11. Considere a equação diferencial linear não homogénea de coeficientes não constantes:

$$y''' - \frac{3}{x} y'' = \frac{20}{x^2} \tag{7}$$

onde a solução, $y(x)$, está definida no intervalo $I =]0, \infty[$.

(a) Determine a solução geral da equação homogénea.

(b) Determine a solução geral da equação (7).

Resolução:

(a) A equação homogénea associada a (7) é

$$y''' - \frac{3}{x}y'' = 0.$$

Fazendo a substituição $z = y''$ obtém-se a equação linear homogénea de 1ª ordem

$$z' - \frac{3}{x}z = 0,$$

cuja solução geral é dada por

$$z(x) = Ke^{\int \frac{3}{x}dx} = Ke^{3\log x} = Kx^3, \qquad \text{com } K \in \mathbb{R},$$

para $x > 0$. Resolvendo agora a equação diferencial

$$y'' = z(x) = Kx^3$$

(basta primitivar duas vezes) obtém-se

$$y(x) = a + bx + \frac{K}{20}x^5 = a + bx + cx^5 \qquad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(b) A solução geral da equação é da forma

$$y(x) = a + bx + cx^5 + y_p(x)$$

em que $y_p(x)$ é uma solução particular da equação. Pela fórmula de variação das constantes

$$y_p(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^5 \end{bmatrix} \int W^{-1}(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{20}{x^2} \end{bmatrix} dx$$

em que a $W(x)$ é a matriz wronskiana associada à equação:

$$W(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^5 \\ 0 & 1 & 5x^4 \\ 0 & 0 & 20x^3 \end{bmatrix}$$

Então

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= \begin{bmatrix}1 & x & x^5\end{bmatrix} \int \frac{1}{20x^3} \begin{bmatrix} 20x^3 & -20x^4 & 4x^5 \\ 0 & 20x^3 & -5x^4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{20}{x^2} \end{bmatrix} dx \\
&= \begin{bmatrix}1 & x & x^5\end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{5}{x} \\ \frac{1}{x^5} \end{bmatrix} dx \\
&= \begin{bmatrix}1 & x & x^5\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4x \\ -5\log x \\ -\frac{1}{5x^4} \end{bmatrix} = \frac{19}{5}x - 5x\log x
\end{aligned}
$$

Finalmente, a solução geral da equação é

$$
y(x) = a + \underbrace{\left(\tilde{b} - \tfrac{19}{5}\right)}_{\shortparallel \atop b} x + cx^5 - 5x\log x, = a + bx + cx^5 - 5x\log x, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.
$$

12. Sendo $R(x)$ uma função real de variável real contínua e $k \neq 0$, mostre que a função

$$
y_p(x) = \frac{1}{k} \int_0^x R(t) \operatorname{sen}\big(k(x-t)\big)\, dt
$$

é solução particular de $y'' + k^2 y = R(x)$.

Resolução:

Sendo $a(x)$ e $b(x)$ funções de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e $f(t,x)$ contínua e com derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ também contínua (ambas em $\mathbb{R}^2$), a regra de Leibniz garante-nos que:

$$
\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\, dt\right) = f\big(b(x), x\big)\, b'(x) - f\big(a(x), x\big)\, a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\, dt
$$

Como estamos nas condições enunciadas — note que $f(t,x) = R(t) \operatorname{sen}\big(k(x-t)\big)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ e tem derivada parcial

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = kR(t)\cos\big(k(x-t)\big)
$$

também contínua (em $\mathbb{R}^2$) — podemos usar a regra de Leibniz para calcular:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k}\int_0^x R(t)\,\mathrm{sen}\,\big(k(x-t)\big)\,dt\right) \\ &= \frac{1}{k}R(x)\,\mathrm{sen}\,\big(k(x-x)\big) + \int_0^x R(t)\cos\big(k(x-t)\big)\,dt \\ &= \int_0^x R(t)\cos\big(k(x-t)\big)\,dt \end{aligned}$$

Aplicando de novo da regra de Leibniz:

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\int_0^x R(t)\cos\big(k(x-t)\big)dt\right)' \\ &= R(x)\cos\big(k(x-x)\big) - k\int_0^x R(t)\,\mathrm{sen}\,\big(k(x-t)\big)\,dt \\ &= R(x) - k^2 y_p(x) \end{aligned}$$

Em conclusão:

$$y_p'' + k^2 y_p = R(x) - k^2 y_p(x) + k^2 y_p(x) = R(x).$$