TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-Am, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 4

Exponencial de uma Matriz. Equações Vectoriais Lineares de 1ª Ordem e Equações Lineares de Ordem n (Caso não Homogéneo)

1. Para cada uma das seguintes matrizes determine e^{At}:

(a) $A = 0$

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + e^{2t} \\ y' = -8y + 8 \end{cases} \quad , \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = (0,0,0,0) \end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

(b) Resolva o problema.

4. Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 2 \\ \dot{y} = 3x - y + 2 \\ \dot{z} = ty - tz \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais $x(0) = y(0) = -z(0) = -1$.

Sugestão: note que as primeiras duas equações não mencionam z.

5. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ de componentes reais ou complexas. Mostre que se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$. Aproveite o resultado para calcular:

$$\exp\left(t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Sugestão: mostre que $X(t) = e^{At}e^{(B-A)t}$ satisfaz $\dot{X} = BX$, $X(0) = I$.

6. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(a) $y'' - 2y' - 3y = \cos t$ (b) $y''' - y' = 2t + 10e^{2t}\operatorname{sen} t$

(c) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = t$ (d) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$

7. Determine a solução do problema de valor inicial

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + y' - 3 = b(t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y^{(2)}(0) = 1$$

quando:

(a) $b(t) = 0$ (b) $b(t) = t$ (c) $b(t) = e^{-t}$

8. Determine a solução da equação diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos x}$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

9. Considere a equação

$$y^{(4)} - 3y^{(3)} + 2y^{(2)} = t + \operatorname{sen} t \tag{1}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (1).

(b) Determine uma solução particular de (1).

(c) Determine a solução de (1) que verifica a condição inicial

$$y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$$

10. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{t}{1-t}y' - \frac{1}{1-t}y = 1 - \frac{1}{t}$$

(a) Determine soluções da equação homogénea associada da forma $y(t) = t^k$ e da forma $y(t) = e^{\lambda t}$, e aproveite os resultados para escrever a solução geral da equação homogénea.

(b) Calcule a solução da equação que verifica as condições iniciais $y(2) = 1$ e $y'(2) = -1$.

Soluções

1. (a) $e^{At}=I$ (b) $e^{At}=\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\pi t}\end{bmatrix}$ (c) $e^{At}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{4t}-e^{2t} & -3e^{4t}+3e^{2t} \\ e^{4t}-e^{2t} & -e^{4t}+3e^{2t}\end{bmatrix}$

   (d) $e^{At}=e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (e) $e^{At}=e^{2t}\begin{bmatrix} 1-6t & 12t \\ -3t & 1+6t\end{bmatrix}$

   (f) $e^{At}=e^{3t}\begin{bmatrix} \cos(2t)+\operatorname{sen}(2t) & -2\operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) & \cos(2t)-\operatorname{sen}(2t)\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}+(t+\frac{1}{2})e^{2t} \\ 1\end{bmatrix}$

3. (a) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 5te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t}\cos(\pi t) & e^{-2t}\operatorname{sen}(\pi t) \\ 0 & 0 & -e^{-2t}\operatorname{sen}(\pi t) & e^{-2t}\cos(\pi t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d\end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t)\end{bmatrix}=\frac{e^{-2t}}{\pi}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\operatorname{sen}((\pi t) \\ 1-\cos(\pi t)\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1+2e^{t^2/2}\end{bmatrix}$

5. $e^t\begin{bmatrix} 1 & 2t & 3t+2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

6. (a) $y(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}-\frac{1}{10}\Big(\operatorname{sen}t+2\cos t\Big)$ com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

   (b) $y(t)=c_1e^{t}+c_2e^{-t}+c_3-t^2-e^{2t}\cos t$ com $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

   (c) $y(t)=c_1+c_2t+c_3e^{2t}-\frac{1}{8}t^2-\frac{1}{12}t^3$ com $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$

   (d) $y(t)=c_1e^{t}+c_2te^{t}+e^t\Big(t\log|t|-t\Big)$ com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

7. (a) $y(t)=-5+5e^{-t}+2te^{-t}+3t$ (b) $y(t)=-2+2e^{-t}+te^{-t}+\frac{t^2}{2}+t$

   (c) $y(t)=-4+4e^{-t}+te^{-t}+3t-\frac{t^2e^{-t}}{2}$

8. $y(x)=e^x\Big(\cos x-\operatorname{sen}x+\cos x\log(\cos x)+x\operatorname{sen}x\Big)$

9. (a) $y_H(t)=c_1+c_2t+c_3e^t+c_4e^{2t}$, com c_1, c_2, c_3 e $c_4\in\mathbb{R}$

   (b) $y_p(t)=\frac{3t^2}{8}+\frac{t^3}{12}-\frac{\operatorname{sen}t+3\cos t}{10}$ (c) $y(t)=\frac{27}{16}+\frac{11}{8}t-\frac{3}{2}e^t+\frac{9}{80}e^{2t}+\frac{3t^2}{8}+\frac{t^3}{12}-\frac{\operatorname{sen}t+3\cos t}{10}$

10. (a) $\lambda=k=1$; $y_h(t)=c_1e^t+c_2t$ (b) $y(t)=(2+\log 2)t-2e^{t-2}-1-t\log t$