

## Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

### Ficha de Problemas Resolvidos nº 3

#### Equações de Ordem $n$ (Caso Homogéneo) e Equações Vectoriais de 1ª Ordem (Caso Homogéneo)

1. Determine a solução geral das seguintes equações:

$$(a) y'' + 9y' + 20y = 0 \quad (b) y'' + \pi^2 y = 0 \quad (c) y'' + 2y' + y = 0$$

#### Resolução

(a) Usando a notação  $y' = Dy$  (e como tal  $y'' = D^2y$ ) obtém-se

$$y'' + 9y' + 20y = 0 \Leftrightarrow (D^2 + 9D + 20)y = 0.$$

Tem-se então que os zeros do polinómio característico associado são

$$P(r) = r^2 + 9r + 20 = 0 \Leftrightarrow r = -4 \vee r = -5.$$

Assim a equação é equivalente a

$$(D + 4)(D + 5)y = 0 \Leftrightarrow (D + 4)y = 0 \text{ ou } (D + 5)y = 0.$$

Na seguinte tabela representamos as raízes de  $P(r)$  e respectivas multiplicidades (ou ordens) e os correspondentes elementos da base do espaço de soluções da equação diferencial:

Raiz	Multiplicidade	Base
-4	1	$e^{-4t}$
-5	1	$e^{-5t}$

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação  $(D^2 + 9)(D + 20)y = 0$  é, por exemplo  $\mathcal{B} = \{e^{-4t}, e^{-5t}\}$ . Assim, a sua solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-5t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Usando a notação  $y' = Dy$ , obtém-se

$$y'' + \pi^2 y = 0 \Leftrightarrow (D^2 + \pi^2)y = 0.$$

Tem-se então que a raiz do polinómio característico associado é

$$P(r) = r^2 + \pi^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm i\pi$$

Neste caso, como ocorrem raízes complexas, acrescentamos à tabela introduzida na alínea (a) uma coluna com uma base constituída apenas por funções reais:

Raiz	Multiplicidade	Base Complexa	Base Real
$\pm i\pi$	1	$e^{i\pi t}, e^{-i\pi t}$	$\cos(\pi t), \text{sen}(\pi t)$

Tem-se então que uma base do espaço de soluções (reais) da equação  $(D^2 + \pi^2)y = 0$  é, por exemplo  $\mathcal{B} = \{\cos(\pi t), \text{sen}(\pi t)\}$  e assim a sua solução geral é

$$y(t) = c_1 \cos(\pi t) + c_2 \text{sen}(\pi t) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(c) Usando a notação  $y' = Dy$ , obtém-se

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 2D + 1)y = 0.$$

Tem-se então que o polinómio característico associado é  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$  cuja única raiz é  $-1$ . Então:

Raiz	Multiplicidade	Base
-1	2	$e^{-t}, te^{-t}$

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação  $(D^2 + 2D + 1)y = 0$  é, por exemplo  $\mathcal{B} = \{e^{-t}, te^{-t}\}$ . Assim, a sua solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Seja  $k \in \mathbb{R}$  uma constante. Determine a solução da seguinte equação diferencial:

$$y'' - ky = 0$$

Sugestão: o cálculo da base do espaço de soluções da equação depende do sinal de  $k$ .

## Resolução

(a) Usando a notação  $y' = Dy$ , a equação  $y'' - ky = 0$  pode-se escrever na forma:

$$(D^2 - k)y = 0$$

Tem-se pois que o polinómio característico associado é  $P(r) = r^2 - k = 0$ . Para determinar as raízes do polinómio característico e as correspondentes soluções da equação diferencial, é conveniente considerar 3 casos.

**Caso 1** ( $k > 0$ ) :

Neste caso o polinómio característico tem duas raízes reais distintas  $\pm\sqrt{k}$  e, assim:

Raiz	Multiplicidade	Base
$-\sqrt{k}$	1	$e^{-\sqrt{k}t}$
$\sqrt{k}$	1	$e^{\sqrt{k}t}$

Desta forma, uma base do espaço de soluções da equação  $(D^2 - k)y = 0$  pode ser  $\mathcal{B} = \{e^{-\sqrt{k}t}, e^{\sqrt{k}t}\}$ . Assim, a solução geral da equação é, neste caso:

$$y(t) = c_1 e^{-\sqrt{k}t} + c_2 e^{\sqrt{k}t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Caso 2** ( $k = 0$ ) : Neste caso, o polinómio característico tem uma única raiz, 0. Tendo em conta que  $e^{0t} = 1$ :

Raiz	Multiplicidade	Base
0	2	1, t

Uma base do espaço de soluções da equação  $D^2y = 0$  é, por exemplo,  $\mathcal{B} = \{1, t\}$  e, assim, a sua solução geral é

$$y(t) = c_1 + c_2 t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

**Caso 3** ( $k < 0$ ) :

Neste caso o polinómio característico tem duas raízes complexas conjugadas,  $\pm i\sqrt{|k|} = \pm i\omega$  (definindo  $\omega = \sqrt{|k|}$ ).

Raiz	Multiplicidade	Base Complexa	Base Real
$\pm i\sqrt{ k } = \pm i\omega$	1	$e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}$	$\cos(\omega t), \sin(\omega t)$

Tem-se então que a solução geral da equação é, neste caso

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(onde  $\omega = \sqrt{|k|} = \sqrt{-k} \Leftrightarrow k = -\omega^2$ ).

3. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \end{cases}$$

### Resolução:

Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação  $y' = Dy$ , obtém-se

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \Leftrightarrow (D^2 + 2D + 5)y = 0$$

O polinómio característico associado é  $P(r) = r^2 + 2r + 5$ , e as suas raízes são  $-1 \pm 2i$ . Assim uma base complexa é

$$\mathcal{B}_c = \{e^{(-1+2i)t}, e^{(-1-2i)t}\}$$

e a respectiva base real é

$$\mathcal{B} = \{e^{-t}\cos(2t), e^{-t}\sin(2t)\}$$

A sua solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Temos agora que determinar  $c_1$  e  $c_2$  de modo a que  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = -2$ . Sendo a solução geral,  $y(t)$ , dada pela expressão anterior, tem-se que

$$y'(t) = -c_1 e^{-t}\cos(2t) - 2c_1 e^{-t}\sin(2t) - c_2 e^{-t}\sin(2t) + 2c_2 e^{-t}\cos(2t)$$

Então

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 + 2c_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Resulta pois que a solução do PVI é

$$y(t) = e^{-t}\cos(2t) - \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$$

4. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.

(a)  $y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$

(b)  $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

### Resolução

(a) Usando a notação  $y' = Dy$ , a equação diferencial pode-se escrever na forma:

$$(D^4 + D^3 - 3D^2 - 5D - 2)y = 0$$

O polinómio característico associado é

$$P(r) = r^4 + r^3 - 3r^2 - 5r - 2$$

É fácil de descobrir duas raízes de  $P(r)$ ; de facto, verifica-se que  $P(-1) = 0$  e  $P(2) = 0$ . Usando (por exemplo) a regra de Ruffini, obtém-se a factorização

$$P(r) = (r + 1)(r - 2)(r^2 + 2r + 1) = (r + 1)^3(r - 2),$$

de onde resulta a tabela seguinte

Raiz	Multiplicidade	Base
-1	3	$e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}$
2	1	$e^{2t}$

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação  $(D^3 + D^2 - 2D)y = 0$  é, por exemplo  $\mathcal{B} = \{e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}, e^{2t}\}$  e assim a sua solução geral é

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + c_3t^2e^{-t} + c_4e^{2t}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

(b) Usando a notação  $y' = Dy$ , obtém-se

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \Leftrightarrow (D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$$

O polinómio característico associado é

$$P(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = (r + i)^2(r - i)^2$$

Assim

$$(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0 \Leftrightarrow (D - i)^2(D + i)^2y = 0$$

Raiz	Multiplicidade	Base Complexa	Base Real
$\pm i$	2	$e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}$	$\cos t, \sin t, t\cos t, t\sin t$

A solução geral pode então ser dada por:

$$y(x) = c_1\cos t + c_2\sin t + c_3t\cos t + c_4t\sin t, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

5. Resolva os seguintes problemas de valor inicial.

$$(a) \begin{cases} y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \\ y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 1. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y''' - 13y'' + 50y' - 56y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1. \end{cases}$$

## Resolução

(a) Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação  $y' = Dy$ , obtém-se

$$y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0 \Leftrightarrow (D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + 1)y = 0$$

O polinómio característico associado é  $P(r) = r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1$ . Pela formula do binómio de Newton:

$$P(r) = (r - 1)^4$$

Assim sendo,

$$(D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + 1)y = 0 \Leftrightarrow (D - 1)^4 y = 0,$$

Uma base do espaço de soluções da equação  $(D - 1)^4 y = 0$  é  $\mathcal{B} = \{e^t, te^t, t^2e^t, t^3e^t\}$ , pelo que a sua solução geral pode ser dada por

$$y(t) = c_0e^t + c_1te^t + c_2t^2e^t + c_3t^3e^t, \quad c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Resta então determinar  $c_0, c_1, c_2$  e  $c_3$  de modo a que  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = -1$  e  $y'''(0) = 1$ . Sendo  $y(t) = (c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3)e^t$ , tem-se que

$$\begin{cases} y'(t) = (c_0 + c_1 + (c_1 + 2c_2)t + (c_2 + 3c_3)t^2 + c_3t^3) e^t \\ y''(t) = (c_0 + 2c_1 + 2c_2 + (c_1 + 4c_2 + 6c_3)t + (c_2 + 6c_3)t^2 + c_3t^3) e^t \\ y'''(t) = (c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3 + (c_1 + 6c_2 + 18c_3)t + (c_2 + 9c_3)t^2 + c_3t^3) e^t \end{cases}$$

pelo que

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -1 \\ y'''(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_0 + c_1 = 1 \\ c_0 + 2c_1 + 2c_2 = -1 \\ c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

Finalmente, a solução do (PVI) é

$$y(t) = (1 - t^2 + t^3)e^t$$

(b) Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação  $y' = Dy$ , obtém-se

$$y''' - 13y'' + 50y' - 56y = 0 \Leftrightarrow (D^3 - 13D^2 + 50D - 56)y = 0 \quad (1)$$

Tem-se então que o polinómio característico associado é  $P(r) = r^3 - 5r^2 - 22r + 56$ . Tendo em conta que  $P(2) = 0$ , dividindo  $P(r)$  por  $r - 2$ ,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -13 & +50 & -56 \\ 2 & & 2 & -22 & 56 \\ \hline & 1 & -11 & 28 & \underline{0} \end{array}$$

obtém-se a factorização:

$$P(r) = (r - 2)(r^2 - 11r + 28) = (r - 2)(r - 4)(r - 7)$$

Resulta pois que (1) é equivalente à equação diferencial

$$(D - 1)(D - 4)(D - 7)y = 0,$$

cujo espaço de soluções possui a seguinte base

Raiz	Multiplicidade	Base
2	1	$e^{2t}$
4	1	$e^{4t}$
7	1	$e^{7t}$

A solução geral da equação (1) é, pois:

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{4t} + c_3e^{7t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Para resolver o problema de valor inicial, resta determinar  $c_1, c_2$  e  $c_3$  de forma a que as condições iniciais sejam satisfeitas. Calculando as derivadas da solução geral,

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2c_1e^{2t} + 4c_2e^{4t} + 7c_3e^{7t}, \\ y''(t) &= 4c_1e^{2t} + 16c_2e^{4t} + 49c_3e^{7t}, \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ 2c_1 + 4c_2 + 7c_3 = -1 \\ 4c_1 + 16c_2 + 49c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -4 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

Desta forma, a solução do PVI é

$$y(t) = 4e^{2t} - 4e^{4t} + e^{7t}$$

6. Encontre a equação diferencial linear homogénea de menor ordem possível tal que as seguintes funções sejam suas soluções.

(a)  $y_1(t) = e^{-t\sqrt{3}}$ ,  $y_2(t) = te^{t\sqrt{3}}$

(b)  $y_1(x) = e^x \cos(2x)$  e  $y_2(x) = xe^{-x}$

(c)  $y(x) = x^2$

### Resolução

(a) Dado que  $y_2(t) = te^{t\sqrt{3}}$  é solução, então também  $y_3(t) = e^{t\sqrt{3}}$  o é; isto porque  $\sqrt{3}$  é certamente raiz do polinómio característico da equação. As funções  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  formam uma base de um espaço de dimensão 3 (visto serem 3 funções linearmente independentes); em consequência, a equação diferencial de menor ordem que as admite como soluções é de ordem 3. Consideraremos uma versão inversa da tabela anteriormente introduzida

Base	Raiz	Multiplicidade	Termo de $p(D)$
$e^{-t\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	1	$D + \sqrt{3}$
$e^{t\sqrt{3}}, te^{t\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	2	$(D - \sqrt{3})^2$

Isto significa que  $e^{t\sqrt{3}}$  e  $te^{t\sqrt{3}}$  são soluções de  $(D - \sqrt{3})^2 y = 0$ , enquanto  $e^{-t\sqrt{3}}$  é uma solução de  $(D + \sqrt{3})y = 0$ . Assim sendo, as funções  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da equação

$$(D - \sqrt{3})^2(D + \sqrt{3})y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^3 - \sqrt{3}D^2 - 3D + 3\sqrt{3})y = 0.$$

A equação pedida é

$$y''' - \sqrt{3}y'' - 3y' + 3\sqrt{3}y = 0$$

(b) Começamos por notar que se  $e^x \cos(2x)$  é solução da equação também  $e^x \sin(2x)$ ; da mesma forma, se  $xe^{-x}$  é solução da equação também  $e^{-x}$  o é. Tem-se então que  $e^x \cos(2x)$ ,  $e^x \sin(2x)$ ,  $xe^{-x}$  e  $e^{-x}$  formam uma base do espaço de soluções da equação pedida, o que mostra que tem que ser de ordem 4. Podemos então considerar a tabela

Base Real	Base Complexa	Raiz	Mult.	Termo de $p(D)$
$e^{-x}, xe^{-x}$	$e^{-x}, xe^{-x}$	-1	1	$(D + 1)^2$
$e^x \cos(2x), e^x \sin(2x)$	$e^{(1+2i)x}, e^{(1-2i)x}$	$1 \pm 2i$	1	$(D - (1 + 2i))(D - (1 - 2i))$

Uma vez que

$$(D + 1)^2(D - (1 + 2i))(D - (1 - 2i))y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D + 1)^2(D^2 - 2D + 5)y = 0$$

a equação pedida é

$$y^{(4)} + 2y'' + 8y' + 5y = 0$$

(c) Começamos por notar que se  $x^2$  é solução, então as funções 1 e  $x$  também o são, pelo que procuramos uma equação de ordem 3. Podemos considerar a tabela



Base	Raiz	Multiplicidade	Termo de $p(D)$
$1, x, x^2$	0	3	$D^3$

pelo que a equação pretendida é

$$D^3y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

7. Resolva o sistema de equações diferenciais lineares vectoriais de primeira ordem:

$$(a) \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X} \quad (b) \mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

$$(c) \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} -\pi & 1 & 0 \\ 0 & -\pi & 1 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

### Resolução

(a) Fazendo  $\mathbf{X} = (x, y, z)$  e escrevendo na forma de sistema

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -y \\ z' = 3z \end{cases}$$

observa-se que as três equações são independentes (denomina-se um sistema *desacoplado*) e como tal podem ser resolvidas directamente. Assim

$$x' = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = ae^{2t}$$

e

$$y' = -y \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = be^{-t}$$

e

$$z' = 3z \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = ce^{3t}$$

A solução geral da equação é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ be^{-t} \\ ce^{3t} \end{bmatrix}$$

com  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes reais.

**Observação:** Sendo  $D$  uma matriz  $n \times n$  diagonal

$$D = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}$$

a solução do sistema em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{X}' = D\mathbf{X}$  é da forma

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{m_1 t} \\ c_2 e^{m_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{m_n t} \end{bmatrix}$$

(b) Fazendo  $\mathbf{X} = (x, y, z)$  e escrevendo na forma de sistema

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3x + 4y \\ z' = 4x + 4y + 4z \end{cases}$$

observa-se que a primeira equação depende apenas da função  $x$  e pode ser resolvida de imediato. Assim

$$x' = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = ae^{2t}$$

Substituindo na segunda equação obtem-se

$$y' = 3ae^{2t} + 4y \quad \Leftrightarrow \quad y' - 4y = 3ae^{2t}$$

Trata-se de uma equação linear de primeira ordem não homogénea que depende só da função  $y$ . A equação admite o factor integrante  $\mu(t) = e^{-4t}$ , pelo que

$$\begin{aligned} y' - 4y = 3ae^{2t} &\Leftrightarrow e^{-4t}y' - 4e^{-4t}y = 3ae^{-2t} \\ &\Leftrightarrow (e^{-4t}y)' = 3ae^{-2t} \\ &\Leftrightarrow e^{-4t}y = -\frac{3a}{2}e^{-2t} + b \\ &\Leftrightarrow y(t) = -\frac{3a}{2}e^{2t} + be^{4t} \end{aligned}$$

Tendo agora as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  podemos substituir na terceira equação e obter uma equação linear de primeira ordem não homogénea que depende só da função  $z$ :

$$z' = 4ae^{2t} + 4\left(-\frac{3a}{2}e^{2t} + be^{4t}\right) + 4z \quad \Leftrightarrow \quad z' - 4z = -2ae^{2t} + 4be^{4t}$$

A equação admite o factor integrante  $\mu(t) = e^{-4t}$ , pelo que

$$\begin{aligned} z' - 4z &= -2ae^{2t} + 4be^{4t} \Leftrightarrow e^{-4t}z' - 4e^{-4t}z = -2ae^{-2t} + 4b \\ &\Leftrightarrow \left(e^{-4t}z\right)' = -2ae^{-2t} + 4b \\ &\Leftrightarrow e^{-4t}z = ae^{-2t} + 4bt + c \\ &\Leftrightarrow z(t) = ae^{2t} + 4bte^{4t} + ce^{4t} \end{aligned}$$

A solução geral da equação é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ -\frac{3a}{2}e^{2t} + be^{4t} \\ ae^{2t} + 4bte^{4t} + ce^{4t} \end{bmatrix}$$

com  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes reais.

**Observação:** Sendo  $T$  uma matriz  $n \times n$  triangular superior (ou inferior) a solução do sistema  $\mathbf{X}' = T\mathbf{X}$  pode ser encontrada desta maneira.

(c) Fazendo  $\mathbf{X} = (x, y, z)$  e escrevendo na forma de sistema

$$\begin{cases} x' = -\pi x + y \\ y' = -\pi y + z \\ z' = -\pi z \end{cases}$$

observa-se que a terceira equação depende apenas da função  $z$  e pode ser resolvida de imediato. Assim

$$z' = -\pi z \Leftrightarrow z(t) = ce^{-\pi t}$$

Substituindo na segunda equação obtem-se

$$y' = -\pi y + ce^{-\pi t} \Leftrightarrow y' + \pi y = ce^{-\pi t}$$

Trata-se de uma equação linear de primeira ordem não homogénea que depende só da função  $y$ . A equação admite o factor integrante  $\mu(t) = e^{\pi t}$ , pelo que

$$\begin{aligned} y' + \pi y &= ce^{-\pi t} \Leftrightarrow e^{\pi t}y' + \pi e^{\pi t}y = c \\ &\Leftrightarrow \left(e^{\pi t}y\right)' = c \\ &\Leftrightarrow e^{\pi t}y = ct + b \\ &\Leftrightarrow y(t) = (ct + b)e^{-\pi t} \end{aligned}$$

Tendo agora a função  $y(t)$  podemos substituir na primeira equação e obter uma equação linear de primeira ordem não homogénea que depende só da função  $x$ :

$$x' = -\pi x + (ct + b)e^{-\pi t} \Leftrightarrow x' + \pi x = (ct + b)e^{-\pi t}$$

A equação admite o factor integrante  $\mu(t) = e^{\pi t}$ , pelo que

$$\begin{aligned} x' = -\pi x + (ct + b)e^{-\pi t} &\Leftrightarrow e^{\pi t} x' + \pi e^{\pi t} x = ct + b \\ &\Leftrightarrow (e^{\pi t} x)' = ct + b \\ &\Leftrightarrow e^{\pi t} x = \frac{c}{2} t^2 + bt + a \\ &\Leftrightarrow x(t) = \left(\frac{c}{2} t^2 + bt + a\right) e^{-\pi t} \end{aligned}$$

A solução geral da equação é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^{-\pi t} \begin{bmatrix} \frac{c}{2} t^2 + bt + a \\ ct + b \\ c \end{bmatrix}$$

com  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes reais.

**Observação:** Uma matriz tendo a forma da deste exemplo

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

isto é, uma matriz  $n \times n$  em que todos os elementos da diagonal principal são  $\lambda \in \mathbb{R}$  e a diagonal acima da principal está preenchida por 1's, denomina-se um *bloco de Jordan*. Resolvendo de forma análoga ao que fizemos no exemplo, a solução do sistema em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{X}' = J\mathbf{X}$  é da forma

$$\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2} + \cdots + c_n \frac{t^{n-1}}{n-1} \\ c_2 + c_3 t + \cdots + c_n \frac{t^{n-2}}{n-2} \\ \cdot \\ c_n t + c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

8. Encontre a solução geral dos sistemas

$$(a) \begin{cases} x' = -7x + 5y \\ y' = -10x + 8y \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -x + 2y - z \\ z' = -y + z \end{cases}$$

**Resolução**

(a) Pelo método de substituição, resolvendo, por exemplo, a primeira equação em ordem a  $y$  obtém-se

$$y = \frac{x' + 7x}{5} \quad (2)$$

Substituindo na segunda equação, obtemos a equação de segunda ordem em  $x$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x' + 7x}{5}\right)' &= -10x + 8\left(\frac{x' + 7x}{5}\right) \Leftrightarrow x'' - x' - 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow (D^2 - D - 6)x = 0 \\ &\Leftrightarrow (D - 3)(D + 2)x = 0 \end{aligned}$$

e assim a solução geral da equação é

$$x(t) = ae^{3t} + be^{-2t}$$

Substituindo em (2) obtemos

$$y(t) = \frac{1}{5}(ae^{3t} + be^{-2t})' + 7\frac{1}{5}(ae^{3t} + be^{-2t}) = 2ae^{3t} + be^{-2t}$$

A solução do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{3t} + be^{-2t} \\ 2ae^{3t} + be^{-2t} \end{bmatrix}$$

com  $a$  e  $b$  constantes reais.

(b) Pelo método de substituição, resolvendo, por exemplo, a primeira equação em ordem a  $y$  obtém-se

$$y = x - x' \quad (3)$$

Substituindo nas outras duas equações obtemos o sistema em  $x$  e  $z$

$$\begin{cases} (x - x')' = -x + 2(x - x') - z \\ z' = -(x - x') + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' - 3x' + x = z \\ z' = -x + x' + z \end{cases}$$

Tem-se então que

$$z = x'' - 3x' + x \quad (4)$$

e substituindo na última equação obtemos a equação de terceira ordem em  $x$

$$\begin{aligned} (x'' - 3x' + x)' &= -x + x' + (x'' - 3x' + x) \Leftrightarrow x''' - 4x'' + 3x' = 0 \\ &\Leftrightarrow (D^3 - 4D^2 + 3D)x = 0 \\ &\Leftrightarrow D(D - 3)(D - 1)x = 0 \end{aligned}$$

e a solução geral da equação é

$$x(t) = a + be^{3t} + ce^t$$

Substituindo em (3) e em (4) obtemos

$$y = a + be^{3t} + ce^t - (a + be^{3t} + ce^t)' = a - 2be^{3t}$$

e

$$z = (a + be^{3t} + ce^t)'' - 3(a + be^{3t} + ce^t)' + (a + be^{3t} + ce^t) = a + be^{3t} - ce^t$$

A solução do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + be^{3t} + ce^t \\ a - 2be^{3t} \\ a + be^{3t} - ce^t \end{bmatrix}$$

com  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes reais.

9. Resolva o seguinte (PVI) em  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + 7y \end{cases}, \quad (x(0), y(0)) = (9, 3)$$

**Resolução:**

Começamos por calcular a solução geral do sistema. Resolvendo a segunda equação em ordem a  $x$  obtém-se

$$x = \frac{y' - 7y}{3} \quad (5)$$

Substituindo na primeira equação, obtemos a equação de segunda ordem em  $y$

$$\begin{aligned} \left(\frac{y' - 7y}{3}\right)' &= \left(\frac{y' - 7y}{3}\right) - 3y \Leftrightarrow y'' - 8y' + 16y = 0 \\ &\Leftrightarrow (D - 4)^2 y = 0 \end{aligned}$$

e a solução geral desta equação é

$$y(t) = (a + bt)e^{4t}$$

Substituindo em (5) obtemos

$$3x(t) = \left((a + bt)e^{4t}\right)' - 7\left((a + bt)e^{4t}\right) = \left(-3a + b(1 - 3t)\right)e^{4t}$$

A solução do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{4t} \begin{bmatrix} -a + b\left(\frac{1}{3} - t\right) \\ a + bt \end{bmatrix}$$

com  $a$  e  $b$  constantes reais. Temos agora que determinar as constantes  $a$  e  $b$  de modo a que  $(x(0), y(0)) = (9, 3)$ . Então

$$\begin{cases} x(0) = 9 \\ y(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - \frac{1}{3}b = 9 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 36 \end{cases}$$

e assim a solução do (PVI) é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{4t} \begin{bmatrix} 9 - 36t \\ 3 + 36t \end{bmatrix}$$

10. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

**Sugestão:** Determine primeiro uma solução particular constante.

**Resolução:**

Escrevendo o sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{AX} + \mathbf{C}(t) \quad (6)$$

Dado que a equação é linear, uma sua solução será da forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p$$

em que  $\mathbf{X}_h$  é a solução geral do problema homogéneo associado  $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ , e  $\mathbf{X}_p$  é uma solução particular da equação  $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{C}$ . Seguindo a sugestão, vamos procurar uma solução particular constante, ou seja, vamos procurar  $\mathbf{X}_p = (c_1, c_2)$  que verifique a equação (6), isto é

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 14c_1 - 10c_2 + 1 = 0 \\ 10c_1 - 2c_2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (c_1, c_2) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

pelo que  $\mathbf{X}_p = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ . De seguida, calculamos  $\mathbf{X}_h$  resolvendo o sistema homogéneo associado.

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y \\ y' = 10x - 2y \end{cases}$$

Resolvendo, por exemplo, a segunda equação em ordem a  $x$

$$x = \frac{y' + 2y}{10} \quad (7)$$

Substituindo na primeira equação obtém-se

$$y'' - 12y' + 72y = 0 \Leftrightarrow (D^2 - 12D + 72)y = 0$$

O polinómio característico associado tem raízes  $6 \pm 6i$  (calculadas acima) e como tal

$$y(t) = e^{6t} (a \cos(6t) + b \sin(6t))$$

Substituindo em (7)

$$x(t) = \frac{e^{6t}}{5} \left( (4a + 3b) \cos(6t) + (4b - 3a) \sin(6t) \right)$$

e

$$\mathbf{X}_h = \frac{e^{6t}}{5} \begin{bmatrix} (4a + 3b)\cos(6t) + (4b - 3a)\sen(6t) \\ 5a\cos(6t) + 5b\sen(6t) \end{bmatrix}$$

e finalmente

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p = \frac{e^{6t}}{5} \begin{bmatrix} (4a + 3b)\cos(6t) + (4b - 3a)\sen(6t) - \frac{1}{4} \\ 5a\cos(6t) + 5b\sen(6t) - \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

para  $a, b \in \mathbb{R}$ .