TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

$1^{\underline{o}}$ Semestre 2024/2025

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 3

Equações Diferenciais de Ordem n (Caso Homogéneo) e Equações Vectoriais de 1ª Ordem (Caso Homogéneo)

1. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(a) $y'' - 6y' + 8y = 0$

(b) $y'' + 8y' + 41y = 0$

(c) $(D+2)^2(D^2 - 2D + 5)^3(D-1)y = 0$

(d) $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$

(e) $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} - y'' = 0$

2. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $y''' - y'' + y' - y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = -y''(0) = 1$

(b) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = 1$ e $y''(0) = 4$

(c) $y^{(3)} + 4y'' - 5y' = 0$ verificando $y(0) = 4$, $y'(0) = -7$ e $y''(0) = 23$

(d) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$ verificando $y^{(n-1)}(0) = y^{(n-2)}(0) = \cdots = y'(0) = y(0) = 0$ para quaisquer $a_i \in \mathbb{R}$.

3. Seja m um número real estritamente positivo. Obtenha a solução do (PVI)

$$y''' - 3my'' + 3m^2y' - m^3y = 0 \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \ , \ y''(0) = 1$$

4. Considere a equação diferencial

$$y''' + a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

onde a_0, a_1 e a_2 são constantes reais. Sabe-se que duas soluções linearmente independentes desta equação são dadas por $y_1(x) = xe^{-x}$ e $y_2(x) = e^{2x}$.

(a) Encontre uma terceira solução linearmente independente.

(b) Determine a_0, a_1 e a_2 com as propriedades acima descritas.

5. Obtenha as equações lineares homogénas de coeficientes constantes, de menor ordem possível, cujo coeficiente da derivada de maior ordem é igual a 1 e que têm as funções abaixo como solução:

(a) e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}.

(b) $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$

(c) 1, x, e^x;

6. Determine a solução geral dos sistemas:

(a) $\begin{cases} x' = -4x - 3y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x - y \\ z' = -x - z \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' = -z \\ y' = y - 4z \\ z' = -4z \end{cases}$

7. Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$, onde:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

8. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = x + y - 2 \end{cases}$$

Sugestão: determine uma solução particular constante.

Soluções

1. (a) $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x}$
(b) $y(x) = e^{-4x}(c_1 \cos(5x) + c_2 \text{sen}(5x))$
(c) $y(t) = (A + Bt)e^{-2t} + (C + Dt + Et^2)e^t \cos 2t + +(F + Gt + Ht^2)e^t \text{sen}\, 2t + Ie^t$ com $A, B, C, D, E, F, G, H, I \in \mathbb{R}$

(d) $y(t) = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \text{sen}\, t + c_4 t \text{sen}\, t$ com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$
(e) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 t e^t + c_5 t^2 e^t$

2. (a) $y(t) = \cos t + \text{sen}\, t$ (b) $y(t) = 4e^t - 3e^{2t} + 3te^{2t}$
(c) $y(t) = 5 - 2e^t + e^{-5t}$ (d) $y(t) = 0$

3. $y(x) = \frac{1}{2} t^2 e^{mx}$

4. (b) $a_0 = 0$, $a_1 = -3$ e $a_2 = -2$

5. (a) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$ (b) $y^{(4)} - y = 0$ (c) $y''' - y'' = 0$

6. **Nota:** as soluções são apresentadas a menos de uma transformação linear da base do espaço de soluções. Para obter uma dessas bases pode-se utilizar vários métodos, produzindo outras tantas respostas equivalentes.

(a) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -3e^{-3t} \\ -2e^{2t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2 & 1+2t \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \text{sen}\, t - \cos t \\ \cos t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\cos t - \text{sen}\, t \\ \text{sen}\, t \\ \text{sen}\, t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-4t} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 4/5 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. **(a)** $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{X}(t) = e^{5t} \begin{bmatrix} -3t+4 \\ 3t-3 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{5(t-1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\text{sen}\, t \\ \text{sen}\, t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$