Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Resolvidos nº 2

Equações Diferenciais Separáveis, Exactas e Redutíveis a Exactas

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

$$\text{(a)} \quad xy + (1+x^2)y' = 0 \qquad\qquad \text{(b)} \quad y' = 1 - x + y^2 - xy^2$$

Resolução:

(a) Para $y \neq 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = -\frac{x}{1+x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{x}{1+x^2}\,dx + c \\ &\Leftrightarrow \quad \log|y| = -\frac{1}{2}\log(1+x^2) + c \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{\pm e^c}{\sqrt{1+x^2}} \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. Note-se que a função nula, $y(x) \equiv 0$ é também solução da equação diferencial.

(b) A equação pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} y' = (1-x)(1+y^2) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{1+y^2} = 1-x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\int \frac{dy}{y^2+1}\Big) = 1-x \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{arctg} y = x - \frac{x^2}{2} + c \quad \Leftrightarrow \quad y = \operatorname{tg}(x - \frac{x^2}{2} + c) \end{aligned}$$

2. Calcule a solução do seguinte problema de valor inicial.

$$\frac{du}{dt} = tu^3(1+t^2)^{-1/2}, \qquad u(0) = 1$$

Resolução:

Trata-se de uma equação separável que pode ser escrita na forma

$$u^{-3}u' = t(1+t^2)^{-1/2}$$

Integrando em ordem a t

$$\int u^{-3}du = \int t(1+t^2)^{-1/2}dt + c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u^{-2}}{-2} = (1+t^2)^{1/2} + c$$

pelo que a solução geral da equação é dada por

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{c - 2\sqrt{1+t^2}}} \quad \text{ou} \quad u(t) = \frac{-1}{\sqrt{c-2\sqrt{1+t^2}}}$$

Dado que $u(0) = 1 > 0$ conclui-se que $c = 3$ e assim a solução do (PVI) é

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+t^2}}}$$

3. Considere a equação diferencial separável

$$x' = x \operatorname{sen} t + x^2 \operatorname{sen} t$$

Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, e determine o seu intervalo máximo de existência.

Resolução:

A equação pode ser escrita na forma

$$x' = (x + x^2) \operatorname{sen} t$$

Para $x \neq 0$ e $x \neq -1$ (podemos excluir estes dois casos visto que $x(t) \equiv 0$ e $x(t) \equiv -1$ são soluções constantes da equação que não verificam a condição inicial), tem-se

$$\frac{x'}{x+x^2} = \operatorname{sen} t \;\Leftrightarrow\; \int \left(\frac{1}{x^2+x}\right) dx = \int \operatorname{sen} t \, dt + c$$

Fazendo a separação em fracções simples da função $\frac{1}{x^2+x}$, obtém-se

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \int \operatorname{sen} t \, dt + c \Leftrightarrow \log\left|\frac{x}{x+1}\right| = -\cos t + c \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = k\, e^{-\cos t}$$

Visto $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, temos que $k = 2$ e a solução do (PVI) é

$$x(t) = \frac{2\, e^{-\cos t}}{1 - 2\, e^{-\cos t}} = \frac{2}{e^{\cos t} - 2}$$

O domínio de diferenciabilidade da função $x(t)$ é

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, e^{\cos t} - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\pm \arccos(\log 2) + 2k\pi \,,\, k \in \mathbb{Z}\}$$

Teremos então que o intervalo máximo de existência de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $\pi/2 \in I$. Conclui-se

$$I \;=\; \big]\arccos(\log 2), -\arccos(\log 2) + 2\pi\big[$$

4. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e a, b e c constantes reais com $b \neq 0$.

a) Mostre que a substituição $v = at+by+c$, transforma a equação numa equação separável.

b) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \quad , \quad y(0) = 1$$

indicando o intervalo máximo de solução.

Resolução:

(a) Se $v = at + by + c$ e $b \neq 0$, então

$$y = \frac{v - at - c}{b}$$

pelo que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{b}\Big(\frac{dv}{dt} - a\Big)$$

Substituindo na equação

$$\frac{dv}{dt} - a = bf(v) \;\Leftrightarrow\; \frac{\dot{v}}{bf(v) + a} = 1$$

que é obviamente uma equação separável.

(b) Por (a), sendo $f(v) = e^v - 2$, com $v = 2t + y - 1$, obtém-se

$$\frac{\dot{v}}{e^v} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big(\int e^{-v} dv\Big) = 1 \;\Leftrightarrow\; -e^{-v} = t + k \Leftrightarrow v(t) = -\log(-t - k)$$

Desfazendo a mudança de variável

$$2t + y - 1 = -\log(-t - k) \Leftrightarrow y(t) = 1 - 2t - \log(-t - k)$$

Dado que $y(0) = 1$, obtem-se $k = -1$ e como tal a solução do PVI é

$$y(t) = 1 - 2t - \log(1 - t)$$

O domínio de diferenciabilidade da função $y(t)$ é

$$D = \{t \in \mathbb{R} \, : \, 1 - t > 0\} =]-\infty, 1[$$

o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $0 \in I$. Conclui-se que

$$I =]-\infty, 1[$$

5. Mostre que as seguintes equações são exactas e resolva-as:

$$(\mathbf{a}) \; (xe^y + y - x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy - e^y - x \qquad (\mathbf{b}) \; 2y^3 + 2 + 6xy^2\frac{dy}{dx} = 0$$

Resolução:

(a) Note-se em primeiro lugar que a equação não é linear nem separável. Resta-nos investigar se será uma equação exacta (ou redutível a exacta). A equação pode ser escrita na forma

$$-2xy + e^y + x + (xe^y + y - x^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

Definindo

$$M(x, y) = -2xy + e^y + x \quad , \quad N(x, y) = xe^y + y - x^2$$

Dado que ambas as funções são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x + e^y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

concluimos que se trata de uma equação exacta, pelo que existe $\Phi(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla\Phi = (M, N)$ e $\Phi(x, y) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial.

- **Cálculo de Φ**

  Atendendo a que $\nabla\Phi = (M, N)$ tem-se que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2xy + e^y + x \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x, y) = -x^2y + xe^y + \frac{x^2}{2} + c(y)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(- x^2 y + x e^y + \frac{x^2}{2} + c(y)\Big) = x e^y + y - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad c'(y) = y$$

tem-se assim que $c(y) = \frac{y^2}{2} + c$ e

$$\Phi(x, y) = -x^2 y + x e^y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

- **Cálculo da solução geral da equação**

  Para M, N e Φ definidas acima

$$\begin{aligned} M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\Phi(x, y)\Big) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \Phi(x, y) = c_2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 y + x e^y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = k \end{aligned}$$

  Ou seja as curvas de nível da função $\Phi(x, y)$ definem implicitamente a solução geral da equação diferencial.

(c) Note-se em primeiro lugar que a equação não é linear mas é separável. Vamos resolvê-la como equação exacta mas aconselha-se o aluno a resolvê-la também como equação separável. Resta-nos investigar se será uma equação exacta (ou redutível a exacta). Definindo

$$M(x, y) = 2y^3 + 2 \quad , \quad N(x, y) = 6xy^2$$

Dado que ambas as funções são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

concluimos que se trata de uma equação exacta, pelo que existe $\Phi(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla\Phi = (M, N)$ e $\Phi(x, y) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial.

- **Cálculo de Φ**

  Atendendo a que $\nabla\Phi = (M, N)$ tem-se que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2y^3 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x, y) = 2xy^3 + 2x + c(y)$$

  Por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N \quad \Leftrightarrow \quad 6xy^2 + c'(y) = 6xy^2 \quad \Leftrightarrow \quad c'(y) = 0$$

  tem-se assim que $c(y) = c$ e

$$\Phi(x, y) = 2xy^3 + 2x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

- **Cálculo da solução geral da equação**

  Para M, N e Φ definidas acima

$$\begin{aligned} M(x,y)+N(x,y)y'=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}y'=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\Phi(x,y)\Big)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \Phi(x,y)=c \\ &\Leftrightarrow \quad 2xy^3+2x=k \end{aligned}$$

  Ou seja as curvas de nível da função $\Phi(x,y)$ definem implicitamente a solução geral da equação diferencial. Dado que neste caso se consegue resolver a equação em ordem a y, obtemos a forma explícita da solução da equação diferencial

$$y(x)=\sqrt[3]{\frac{k-2x}{2x}} \quad , \quad k\in\mathbb{R}$$

6. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{4y^2+2x}$$

   a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu=\mu(y)$.

   b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1)=1$.

   c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

Resolução:

(a) A equação pode ser escrita na forma

$$y+(4y^2+2x)\frac{dy}{dx}=0$$

Fazendo

$$M(x,y)=y \quad , \quad N(x,y)=4y^2+2x$$

é óbvio que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1 \neq \frac{\partial N}{\partial x}=2$$

pelo que teremos que investigar a existência de um factor integrante. Vamos averiguar se existirá $\mu(y)$ (como sugerido), tal que a equação

$$\mu(y)y + \mu(y)\left(4y^2 + 2x\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, isto é verifica

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(y)y\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(y)\left(4y^2 + 2x\right)\Big)$$

Efectuando as derivadas

$$\mu'(y)y + \mu(y) = 2\mu(y)$$

e para $y \neq 0$ obtemos

$$\mu'(y) = \frac{1}{y}\mu(y)$$

pelo que

$$\mu(y) = y$$

é um factor integrante da equação.

(b) Pela alínea (a) a equação

$$y^2 + (4y^3 + 2xy)y' = 0$$

é exacta, pelo que existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verifcando

$$\nabla\Phi(x,y) = (y^2, 4y^3 + 2xy)$$

e $\Phi(x,y) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial. Para calcular Φ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = y^2 \;\Leftrightarrow\; \Phi(x,y) = xy^2 + c(y)$$

e

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 4y^3 + 2xy \;\Leftrightarrow\; 2xy + c'(y) = 4y^3 + 2xy \;\Leftrightarrow\; c(y) = y^4 + c$$

e finalmente

$$\Phi(x,y) = xy^2 + y^4 = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Dado que $y(1) = 1$, tem-se que $C = 2$. Por outro lado $N(1,1) = 6 \neq 0$, o Teorema da Função Implícita garante a existência de solução única do PVI, definida por

$$xy^2 + y^4 - 2 = 0 \tag{1}$$

para x numa vizinhança de $x_0 = 1$.

(c) Para calcular o intervalo máximo de solução, note-se que, resolvendo a equação (1) em ordem a y

$$y(x) = \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + 8}}{2}}$$

(onde as escolhas dos ramos das raízes foi baseado no facto de os dados iniciais $x_0 = 1 > 0$ e $y_0 = 1 > 0$). Dado que $x^2 + 8 > 0$ e

$$-x + \sqrt{x^2 + 8} > 0 \qquad , \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

tem-se que o intervalo máximo de solução é $\mathbb{R}$.

7. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^2\left(\dfrac{1}{x}+\log x\right)+2y\log x\dfrac{dy}{dx} & = & 0 \\ \\ y(e) & = & -1 \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

Resolução:

Trata-se de uma equação da forma

$$M(x,y)+N(x,y)y'=0,$$

com $M(x,y)=y^2\left(\frac{1}{x}+\log x\right)$ e $N(x,y)=2y\log x$. Estas funções estão definidas e são de classe C^1 no semi-plano

$$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \, : \, x>0\}$$

Temos que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2y}{x}+2y\log x \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{2y}{x},$$

pelo que a equação não é exacta. Multiplicando a equação por um factor integrante $\mu=\mu(x,y)$, obtém-se:

$$\mu(x,y)M(x,y)+\mu(x,y)N(x,y)y'=0.$$

Para que esta equação seja exacta, μ deverá verificar

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N),$$

o que é equivalente a

$$y^2\left(\frac{1}{x}+\log x\right)\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\left(\frac{2y}{x}+2y\log x\right)=2y\log x\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{2y}{x},$$

ou, ainda:

$$y^2\left(\frac{1}{x}+\log x\right)\frac{\partial\mu}{\partial y}-2y\log x\frac{\partial\mu}{\partial x}=-2y\log x\mu \tag{2}$$

Parece pois provável a existência de um factor integrante dependente apenas de x. De facto, admitindo que $\mu=\mu(x)$, então $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu'(x)$, pelo que a equação (2) reduz-se a:

$$\mu'=\mu.$$

Podemos então tomar $\mu(x)=e^x$. Desta forma, a equação:

$$e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)y^2+2ye^x\log x\frac{dy}{dx}=0$$

é exacta, e portanto existe $F(x,y)$ tal que esta mesma equação se pode escrever:

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = 0.$$

F é então o potencial do campo gradiente $\left(e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)y^2, 2ye^x\log x\right)$. Assim sendo:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2ye^x \log x.$$

Integrando (em ordem a y), obtém-se:

$$F(x,y) = y^2e^x\log x + h(x). \tag{3}$$

Por outro lado, como

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right) + h'(x) = e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)y^2,$$

temos $h'(x) = 0$, pelo que se pode tomar $h(x) = 0$ em (3). A solução geral da equação diferencial é então dada implicitamente por:

$$y^2e^x\log x = C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Da condição inicial $y(e) = -1$, resulta que $C = e^e$.

Como $\log x \neq 0$ para x numa vizinhança de e, podemos dividir por $e^x\log x$ e obter (escolhendo o sinal de acordo com a condição inicial):

$$y(x) = -\sqrt{\frac{e^e}{e^x\log x}} = -\sqrt{\frac{e^{e-x}}{\log x}}. \tag{4}$$

Esta expressão define uma função continuamente diferenciável em $]1,+\infty[$ e satisfaz a forma implícita da solução nesse intervalo. De acordo com (4), temos que a solução explode quando $x \to 1$, pelo que $]1,+\infty[$ é mesmo o intervalo máximo de solução.

8. Considere a equação diferencial ordinária

$$\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{5}$$

a) Mostre que (5) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.

b) Mostre que a solução de (5) com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.

c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto -1, da solução dada implicitamente na alínea anterior.

Resolução:

(a) Admitindo que a equação (5) admite um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$, tem-se que

$$\mu(xy)\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \mu(xy)\left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

é uma equação exacta, pelo que

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(xy)\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(xy)\left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\Big)$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(xy) = \mu'(xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x\mu'(xy)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(xy) = \mu'(xy)\frac{\partial}{\partial}(xy) = y\mu'(xy)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \mu'(xy)x\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \mu(xy)(4x^2 + 6xy + 6y^2) &= \\ \mu'(xy)y\left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right) + \mu(xy)(6x^2 + 6xy + 4y^2) \end{aligned}$$

Fazendo $v = xy$, obtém-se então

$$\mu'(v) = \frac{1}{v}\mu(v) \;\Leftrightarrow\; \mu(v) = v \;\Leftrightarrow\; \mu(xy) = xy$$

Por construção a equação

$$xy\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + xy\left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, pelo que existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla\Phi(x,y) = (4x^3y^2 + 3x^2y^3 + 2xy^4, 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3)$$

e $\Phi(x,y) = C$ define implicitamente a solução da equação. Para calcular Φ,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 4x^3y^2 + 3x^2y^3 + 2xy^4 \;\Rightarrow\; \Phi(x,y) = x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + c(y)$$

e

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3 \;\Rightarrow\; 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3 + c'(y) = 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3$$

o que implica $c(y) = c$. Tem-se então

$$\Phi(x,y) = x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Finalmente, visto $y(-1) = 1$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(-1, 1) = 3 \neq 0$, o Teorema da Função Implícita garante a existência de solução única de (5) definida por

$$x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - 1 = 0$$

para x numa vizinhança de $x_0 = -1$ como se queria mostrar.

(c) O polinómio de Taylor de segunda ordem pedido, será

$$P_2(x) = y(-1) + y'(-1)(x+1) + y''(-1)\frac{(x+1)^2}{2}$$

É dado que $y(-1) = 1$, e atendendo a que

$$y'(x) = -\frac{4x^2y + 3xy^2 + 2y^3}{2x^3 + 3x^2y + 4xy^2}$$

para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$ que não anule $2x^3 + 3x^2y + 4xy^2$, tem-se em particular que

$$y'(-1) = -\frac{4x^2y + 3xy^2 + 2y^3}{2x^3 + 3x^2y + 4xy^2}\Big|_{(x,y)=(-1,1)} = 1$$

Finalmente, derivando (6) em ordem a x

$$\begin{aligned} y''(x) \quad &= \quad -\frac{(8xy + 4x^2y' + 3y^2 + 6xyy' + 6y^2y')(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2)}{(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2)^2} + \\ &\quad + \frac{(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3)(6x^2 + 6xy + 3x^2y' + 4y^2 + 8xyy')}{(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2)^2} \end{aligned}$$

Sabendo que se $x = -1$, $y = 1$ e $y' = 1$, tem-se então

$$y''(-1) = -\frac{2}{3}$$

e

$$P_2(x) = 1 + (x+1) - \frac{(x+1)^2}{3}$$