TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Cursos: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Resolvidos nº 1

Equações Diferenciais Lineares de 1ª ordem

1. Indique a ordem da equação diferencial $y'' + \pi^2 y = 0$. Verifique que $y(x) = a\cos(\pi x) + b\,\mathrm{sen}(\pi x)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ é solução e $y(\frac{1}{2}) = 1$, $y'(\frac{1}{2}) = 0$.

Resolução:

Trata-se de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (linear). Para verificar que a função dada é solução, vamos substituir e verificar que se obtém uma proposição verdadeira. Como

$$y'(x) = -\pi a\,\mathrm{sen}(\pi x) + \pi b\cos(\pi x), \qquad y''(x) = -\pi^2 a\cos(\pi x) - \pi^2 b\,\mathrm{sen}(\pi x),$$

então

$$y''(x) + \pi^2 y(x) = -\pi^2 a\cos(\pi x) - \pi^2 b\,\mathrm{sen}(\pi x) + \pi^2 a\cos(\pi x) + \pi^2 b\,\mathrm{sen}(\pi x) = 0$$

A afirmação é verdadeira para todo x, a e $b \in \mathbb{R}$ e assim, $y(x)$, é solução da equação. Para calcular as constantes a e b de modo a que $y(\frac{1}{2}) = 1$, $y'(\frac{1}{2}) = 0$, substituimos na solução e na sua derivada x por $1/2$:

$$\begin{cases} y(\frac{1}{2}) = a\cos\frac{\pi}{2} + b\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1 \\ y'(\frac{1}{2}) = -\pi a\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} + b\pi\cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

pelo que a solução da equação que verifica as condições dadas é $y(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$.

2. Determine a solução do problema de valor inicial $y' = xe^{x^2/2}$ com $y(1) = 2$.

Resolução:

Primitivando ambos os membros da equação

$$\int y'(x)dx = \int xe^{x^2/2}dx \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = e^{x^2/2} + c, \quad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

Usando a condição inicial, $2 = y(1) = e^{1/2} + c$, pelo que $c = 2 - e^{1/2}$. A solução do problema de valor inicial é, pois:

$$y(x) = e^{x^2/2} - e^{1/2} + 2.$$

3. Determine todas as soluções da equação diferencial ordinária linear

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = (x-2)e^x, \qquad \text{para } \; x > 0.$$

Resolução:

Para $x \neq 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$y' + \frac{2}{x}\,y = \frac{(x-2)}{x}\,e^x \tag{1}$$

Trata-se de uma equação linear, e admite um factor integrante, $\mu(x)$ dado por

$$\mu' = \frac{2}{x}\,\mu \quad \Leftrightarrow \quad \mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\log x} == e^{\log x^2} = x^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação (1) por μ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^2y) = (x^2-2x)e^x \quad &\Leftrightarrow \quad x^2y = \int (x^2-2x)e^x dx + c \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x^2}\Big((x^2-4x+4)e^x + c\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x^2}\Big((x-2)^2e^x + c\Big)
\end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

4. Determine a solução do problema de valor inicial
$$\frac{dv}{du}+\frac{2u}{1+u^2}v-\frac{1}{1+u^2}=0,\ v(0)=1.$$

Resolução:

A equação é equivalente a
$$\frac{dv}{du}+\frac{2u}{1+u^2}v=\frac{1}{1+u^2} \tag{2}$$
que é uma equação linear em v e admite um factor integrante, $\mu(u)$, dado pela equação
$$\mu'=\frac{2u}{1+u^2}\mu \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\mu'}{\mu}=\frac{2u}{1+u^2} \quad\Leftrightarrow\quad \log\mu=\log(1+u^2) \quad\Leftrightarrow\quad \mu=1+u^2$$
Multiplicando ambos os membros da equação (2) por μ obtemos
$$\begin{aligned}(1+u^2)\frac{dv}{du}+2u\,v=1 \quad&\Leftrightarrow\quad \frac{d}{du}\Big((1+u^2)v\Big)=1\\ &\Leftrightarrow\quad (1+u^2)v=u+c\\ &\Leftrightarrow\quad v(u)=\frac{u+c}{1+u^2}\end{aligned}$$
Dado que
$$1=v(0)=c,$$
a solução do PVI é
$$v(u)=\frac{u+1}{u^2+1}$$

5. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa de arrefecimento de uma substância numa corrente de ar, é proporcional à diferença entre a temperatura da substância e a do ar. O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto. O perito da policia chegou à 1:00h da madrugada e, imediatamente, mediu a temperatura do cadáver, que era de 34,8 C. Uma hora mais tarde a temperatura era 34,1^{o}C. A temperatura do quarto onde se encontrava a vítima manteve-se constante a 20^{o}C. Estime a hora a que se deu o crime, admitindo que a temperatura normal de uma pessoa viva é de 36,5^{o}C.

Resolução:

Sendo $T(t)$ a temperatura do corpo no instante t, o modelo matemático para a lei de arrefecimento de Newton é:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

onde T_a é a temperatura ambiente e $-k < 0$ é a constante de proporcionalidade (do arrefecimento do corpo). Temos pois, como no problema anterior, que

$$T' + kT = 20k \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{kt}T\right)' = 20ke^{kt} \quad \Leftrightarrow \quad T(t) = 20 + ce^{-kt}$$

Tomando $t_0 = 0$ o instante em que a primeira medição de temperatura foi feita, temos que

$$T(0) = 34.8 \quad \Leftrightarrow \quad c = 14.8$$

e assim

$$T(t) = 20 + 14.8\, e^{-kt}$$

Para determinar a taxa de arrefecimento, k, usamos a outra medição:

$$T(1) = 34.1 \quad \Leftrightarrow \quad 34.1 = 20 + 14.8\, e^{-kt} \quad \Leftrightarrow \quad k = -\log\frac{14.1}{14.8} \approx 0.0485$$

e então

$$T(t) = 20 + 14.8\, e^{-0{,}0485\, t}$$

Para saber quando o crime foi cometido, pretende-se saber a que horas a temperatura do corpo era de 36.5 C, queremos determinar t tal que

$$T(t) = 36.5 \quad \Leftrightarrow \quad 36.5 = 20 + 14.8\, e^{-0{,}0485\, t} \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{\log\frac{16.5}{14.8}}{0.0485} \approx -2.24$$

Conclui-se que o crime foi cometido por volta das 22h 45min.

6. Considere a equação diferencial

$$2x\frac{dy}{dx} + 2xy^5 - y = 0$$

(a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-4}$.

(b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

Resolução:

(a) Seguindo a sugestão, fazemos $v(x) = \big[y(x)\big]^{-4}$ pelo que

$$\frac{dv}{dx} = -4y^{-5}\frac{dy}{dx}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $-4y^{-5}$, obtém-se:

$$2x\underbrace{\left(-4y^{-5}\frac{dy}{dx}\right)}_{\substack{\| \\ \frac{dv}{dx}}} \;+\; 2x\left(-\,4\underbrace{y^{-5}y^{5}}_{\substack{\| \\ 1}}\right) \;+\; 4\underbrace{y^{-5}y}_{\substack{\| \\ v}} \;=\; 0,$$

ou seja,

$$2x\frac{dv}{dx} \;-\; 8x \;+\; 4v \;=\; 0$$

Dividindo por $2x$ e rearranjando os termos, obtém-se a equação linear não homogénea:

$$\frac{dv}{dx} \;+\; \frac{2}{x}\,v \;=\; 4 \tag{3}$$

O seu factor integrante é dado por

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$$

Multiplicando todos os termos da equação (3) por $\mu(x)$

$$x^2\,\frac{dv}{dx} + 2x\,v = 4x^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\big(x^2v\big) = 4x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2v = \frac{4x^3}{3} + c \;\Leftrightarrow\; v(x) = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2}$$

Finalmente, desfazendo a mudança de variável,

$$y^{-4}(x) = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2} \quad\Leftrightarrow\quad y(x) = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{\frac{4x}{3}+\frac{c}{x^2}}} = \pm\sqrt[4]{\frac{3x^2}{4x^3+c}}$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

(b) Dado que $y(1) = 1$, conclui-se que $y(x)$ é positivo e $c = -1$. Como tal a solução do PVI é dada por

$$y(x) = \sqrt[4]{\frac{3x^2}{4x^3-1}}.$$

O domínio de diferenciabilidade da função $y(x)$ é

$$D \;=\; \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 4x^3 - 1 \neq 0 \;\text{ e }\; \frac{3x^2}{4x^3-1} > 0\right\} \;=\; \Big]\sqrt[3]{1/4}, +\infty\Big[$$

o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $1 \in I$, ou seja:

$$I \;=\; \Big]\sqrt[3]{1/4}, +\infty\Big[$$

7. Encontre as soluções da equação $y' \operatorname{sen} t + y \cos t = 1$ no intervalo $]0, \pi[$. Mostre que só há uma solução tal que $\lim_{t \to 0} y(t)$ é finito e indique um problema de valor inicial que tenha essa solução.

Resolução:

É de notar que $(\operatorname{sen} t)' = \cos t$ e, como tal, a equação pode ser escrita na forma

$$y' \operatorname{sen} t + y(\operatorname{sen} t)' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Big(y \operatorname{sen} t\Big)' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \operatorname{sen} t = t + C \qquad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Dado que para $t \in]0, \pi[$ a função $\operatorname{sen} t$ não se anula, resulta que a solução geral da equação (definida nesse intervalo) é dada por

$$y(t) = \frac{t + C}{\operatorname{sen} t},$$

com $C \in \mathbb{R}$. Como para $C \neq 0$

$$\lim_{t \to 0} y(x) \; = \; \lim_{t \to 0} \frac{t}{\operatorname{sen} t} + C \lim_{t \to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} t} \; = \; 1 + C \lim_{t \to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} t} \; = \; 1 \pm \infty = \pm\infty$$

então o limite da solução quando $t \to 0$ só é finito quando $C = 0$; nesse caso,

$$y(t) = \frac{t}{\operatorname{sen} t} \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to 0} y(x) = 1.$$

A condição inicial a acrescentar a equação diferencial pode ser a seguinte:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

8. Obtenha a solução $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da seguinte equação:

$$y(t) = 1 + \int_1^t sy(s)\, ds. \tag{4}$$

Resolução:

Derivando ambos os membros da equação integral (4) em ordem a t e aplicando o teorema fundamental do cálculo, obtém-se:

$$y'(t) = \left(\int_1^t sf(s)\, ds\right)' \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) = ty(t)$$

Desta forma, $y(t)$ é solução da equação linear homogenea

$$y' = ty \qquad \Leftrightarrow \qquad y(t) \;=\; Ke^{\int t\,dt} \;=\; Ke^{\frac{t^2}{2}}$$

onde $K \in \mathbb{R}$. Atendendo a que, pela mesma equação (4), $y(1) = 1$ tem-se que $Ke^{1/2} = 1$, ou seja, $K = e^{-1/2}$. Assim, a solução da equação integral é

$$y(t) = e^{\frac{t^2-1}{2}}$$

e está definida para $t \in \mathbb{R}$.