TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat

Ficha de Problemas Resolvidos nº 12

Transformada de Laplace

1. Calcule as transformadas de Laplace e os domínios da convergência das funções definidas em $[0, +\infty[$ pelas expressões seguintes:

(a) $te^{\pi t}\cos(2t)$

(b) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ 0 \leq t < 2 \\ t^2 - 1 & \text{se } \ t \geq 2 \end{cases}$

Resolução:

(a) Usando a propriedade da derivada da transformada de Laplace

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t\cos(2t)\}(s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\cos(2t)\}(s) = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+4} \\ &= -\frac{(s^2+4) - s(2s)}{(s^2+4)^2} = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} \qquad \text{para } \ s > 0.\end{aligned}$$

Usando agora a propriedade da translação da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{e^{\pi t}\, t\cos(2t)\}(s) = \frac{(s-\pi)^2 - 4}{\left((s-\pi)^2+4\right)^2} \qquad \text{para } \ s > \pi.$$

(b) Tendo em conta que $f(t) = H(t-2)(t^2-1)$, em primeiro lugar determinamos $f(t)$ tal que $t^2 - 1 = f(t-2)$:

$$t^2 - 1 = \big(\underbrace{(t-2)}_{=\theta} + 2\big)^2 - 1 = f(t-2) \qquad \text{com} \qquad f(\theta) = (\theta+2)^2 - 1 = \theta^2 + 4\theta + 3.$$

Assim sendo, e usando a propriedade da transformada de Laplace da translação:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{H(t-2)f(t-2)\}(s) &= e^{-2s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = e^{-2s}\mathcal{L}\{t^2+4t+3\}(s) \\ &= e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{3}{s}\right) \qquad \text{para } \ s > 0.\end{aligned}$$

2. Determine as funções cujas transformadas de Laplace são

(a) $\dfrac{s}{s^2-4s+13}$

(b) $\dfrac{s}{(s+2)(s^2+4)}$

(c) $\dfrac{5s\,e^{-s}}{s^2+s-6}$

Resolução:

(a) Temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{s}{s^2-4s+13} = \frac{s}{(s-2+3i)(s-2-3i)} = \frac{s-2+2}{(s-2)^2+9} \\
&= \frac{s-2}{(s-2)^2+9} + \frac{2}{3}\,\frac{3}{(s-2)^2+9} \\
&= \mathcal{L}\{e^{2t}\cos(3t)\}(s) + \frac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{2t}\operatorname{sen}(3t)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\left\{e^{2t}\left(\cos(3t)+\tfrac{2}{3}\operatorname{sen}(3t)\right)\right\}(s).
\end{aligned}$$

Usando agora a propriedade da transformada de Laplace da translação:

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{e^{2t}\cos(3t)\}(s-2).$$

Resulta pois que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{s}{s^2-4s+13}\right\}(t) = e^{2t}\left(\cos(3t)+\tfrac{2}{3}\operatorname{sen}(3t)\right).$$

(b) Seja $F(s) = \frac{1}{s+2}$ e $G(s) = \frac{s}{s^2+4}$. Usando a propriedade da transformada de Laplace da convolução:

$$\frac{s}{(s+2)(s^2+4)} = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s),$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= F(s) = \frac{1}{s+2} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\}(s) \quad\Rightarrow\quad f(t)=e^{-2t} \\
\mathcal{L}\{g(t)\}(s) &= G(s) = \frac{s}{s^2+4} = \mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) \quad\Rightarrow\quad g(t)=\cos 2t
\end{aligned}$$

Resulta então que a transformada de Laplace inversa da função dada é

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f*g)(t) \\
&= \int_0^t e^{-2(t-y)}\cos 2y\,dy = e^{-2t}\int_0^t e^{2y}\cos 2y\,dy \\
&= \frac{e^{-2t}}{4}\Big(e^{2t}(\operatorname{sen} 2t+\cos 2t)-1\Big) \\
&= \frac{1}{4}\big(\operatorname{sen} 2t+\cos 2t-e^{-2t}\big).
\end{aligned}$$

(c) A função é dada por $e^{-s}F(s)$, onde

$$F(s) = \frac{5s}{s^2+s-6} = \frac{5s}{(s+3)(s-2)}.$$

Fazendo a decomposição em fracções simples, obtém-se

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{3}{s+3} + \frac{2}{s-2} \\ &= \mathcal{L}\{3e^{-3t} + 2e^{2t}\}(s) \end{aligned}$$

Finalmente, usando a propriedade da translação da transformada de Laplace:

$$e^{-s}F(s) = \mathcal{L}\Big\{H(t-1)\big(3e^{-3(t-1)} + 2e^{2(t-1)}\big)\Big\}(s)$$

ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}F(s)\right\} = H(t-1)\big(3e^{-3(t-1)} + 2e^{2(t-1)}\big).$$

3. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$y'' - y = b(t)\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,,$$

onde

$$b(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ 0 \le t \le 5 \\ 0 & \text{se } \ t > 5. \end{cases}$$

Resolução:

Notando que $b(t) = 1 - H(t-5)$ e aplicando a transformada de Laplace à equação diferencial, obtemos

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-5s}}{s} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s^2-1)} - e^{-5s}\frac{1}{s(s^2-1)},$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}\big\{f(t)\big\}(s)$. Decompondo $\frac{1}{s(s^2-1)}$ em frações simples:

$$\frac{1}{s(s^2-1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}.$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é:

$$\begin{aligned} y(t) &= -1 + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} - H(t-5)\left(-1 + \frac{1}{2}e^{t-5} + \frac{1}{2}e^{-(t-5)}\right) \\ &= \operatorname{ch} t - 1 - H(t-5)\big(\operatorname{ch}(t-5) - 1\big). \end{aligned}$$

4. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y'' - y = -H(t-6)e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

Resolução:

Note que

$$b(t) = -H(t-6)e^{2t} = -H(t-6)e^{2(t-6)+12} = -e^{12}H(t-6)e^{2(t-6)}.$$

Denotando a transformada de Laplace de $y(t)$ por $Y(s)$ e aplicando esta transformada à equação, obtemos

$$s^2Y(s) - Y(s) = -e^{12}\frac{e^{-6s}}{s-2} \Leftrightarrow Y(s) = -e^{12}\frac{e^{-6s}}{(s-2)(s^2-1)}$$

donde

$$Y(s) = e^{12}\, e^{-6s}\left(-\frac{1}{3(s-2)} + \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{6(s+1)}\right).$$

Conclui-se que a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = e^{12}H(t-6)\left(-\frac{1}{3}e^{2(t-6)} + \frac{1}{2}e^{t-6} - \frac{1}{6}e^{-(t-6)}\right).$$

5. Determine a solução do problema de valor inicial

$$y'' + 4y = f(t), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2,$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < \pi \\ t & \text{se} \quad t \geq \pi \end{cases}$$

Resolução:

Em primeiro lugar, notemos que $f(t) = tH(t-\pi)$, pelo que

$$\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\big\{H(t-\pi)\big\}(s) = -\frac{d}{ds}\frac{e^{-\pi s}}{s} = e^{-\pi s}\left(\frac{\pi}{s} + \frac{1}{s^2}\right).$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, e denotando $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ por $Y(s)$, obtém-se

$$s^2Y(s) - y'(0) - sy(0) + 4Y(s) = e^{-\pi s}\left(\frac{\pi}{s} + \frac{1}{s^2}\right),$$

o que é equivalente a

$$(s^2+4)Y(s) - 2 - 3s = e^{-\pi s}\left(\frac{\pi}{s} + \frac{1}{s^2}\right).$$

Resolvendo em ordem a $Y(s)$ e efectuando as decomposições em fracções simples, resulta que:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2+3s}{s^2+4} + e^{-\pi s}\left(\frac{\pi}{s(s^2+4)} + \frac{1}{s^2(s^2+4)}\right) \\
&= \frac{2}{s^2+4} + 3\,\frac{s}{s^2+4} + e^{-\pi s}\left(\frac{\pi}{4}\Big(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\Big) + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\Big)\right) \\
&= \mathcal{L}\big\{\text{sen}\,2t + 3\cos 2t\big\}(s) + e^{-\pi s}\mathcal{L}\left\{\frac{\pi}{4}\big(1-\cos 2t\big) + \frac{1}{4}\big(t - \tfrac{1}{2}\text{sen}\,2t\big)\right\}(s) \\
&= \mathcal{L}\left\{\text{sen}\,2t + 3\cos 2t + H(t-\pi)\left(\frac{\pi}{4}\big(1-\cos(2t-2\pi)\big) + \frac{t-\pi}{4} - \frac{\text{sen}\,(2t-2\pi)}{8}\right)\right\}(s)
\end{aligned}$$

Assim, a solução do PVI é

$$y(t) = \text{sen}\,2t + 3\cos 2t + H(t-\pi)\left(\frac{t}{4} - \frac{\pi}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\text{sen}\,2t\right).$$

6. Calcule a solução do PVI

$$y'' + 4y = \delta(t-2) \qquad , \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

sendo $\delta(t-2)$ a distribuição delta de Dirac centrada em 2.

Resolução:

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se:

$$-y'(0) - sy(0) + s^2Y(s) + 4Y(s) = e^{-2s}$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}\big\{y(t)\big\}(s)$. Usando as condições iniciais, obtém-se:

$$(s^2+4)Y(s) = e^{-2s} \qquad \Leftrightarrow \qquad Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+4}.$$

Invertendo a transformada de Laplace,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big\{y(t)\big\}(s) = Y(s) &= e^{-2s}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{s^2+4} \\
&= e^{-2s}\,\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\text{sen}\,(2t)\right\}(s) \\
&= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}H(t-2)\text{sen}\,\big(2(t-2)\big)\right\}(s),
\end{aligned}$$

pelo que a solução do PVI é

$$y(t) \;=\; \frac{1}{2}H(t-2)\text{sen}\,(2t-4).$$

7. Sendo f uma função definida em $\mathbb{R}_0^+$ verificando $\big|f(t)\big| \le Me^{\alpha t}$ para certos $M \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que:

$$\mathcal{L}\big\{f'(t)\big\}(s) \;=\; -f(0) + s\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}(s) \quad , \quad \forall s > \alpha$$

Resolução: Integrando por partes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big\{f'(t)\big\}(s) \;&=\; \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-st} f'(t)\,dt \\
&=\; \lim_{R\to+\infty} \left(e^{-st} f(t)\Big|_0^R \;-\; \int_0^R \frac{d(e^{-st})}{dt}\, f(t)\,dt \right) \\
&=\; \lim_{R\to+\infty} \left(e^{-st} f(t)\Big|_0^R \;+\; s\int_0^R e^{-st} f(t)\,dt \right) \\
&=\; \lim_{R\to+\infty} \Big(e^{-sR} f(R) - f(0) \Big) \;+\; s\,\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}(s)
\end{aligned}$$

Tendo em conta que, para $s > \alpha$,

$$\big|e^{-sR} f(R)\big| \;=\; e^{-sR}\big|f(R)\big| \;\le\; e^{-sR}\cdot Me^{\alpha t} \;=\; Me^{(\alpha - s)t} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad \text{quando} \quad R \to +\infty,$$

resulta que

$$\mathcal{L}\big\{f'(t)\big\}(s) = -f(0) \;+\; s\,\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}(s)\;, \qquad \text{para} \;\; s > \alpha.$$