# Cálculo Diferencial e Integral III

## 1º Semestre 2024/2025

**Curso:** LEQ, LEAmb, LEMat

## Ficha de Problemas nº 12

**Transformada de Laplace**

# 1 Exercícios Propostos

**1.** Calcule as transformadas de Laplace e os domínios de convergência das funções definidas em $[0, +\infty[$ pelas expressões seguintes:

(a) $4t - 2$ (b) $2\cos t + 3\,\mathrm{sh}\,(2t)$ (c) $e^{-3t}\cos(2t)$ (d) $H_1(t)(t-1)^2$

(e) $te^{at}$ (f) $\mathrm{sen}^2(\omega t)$ (g) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{se} \quad t > 1 \end{cases}$ (h) $\dfrac{\mathrm{sen}\, t}{t}\ (t > 0)$.

Nota: para a alínea (h), use o valor do integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\, t}{t}\, dt = \pi$.

**2.** Determine as funções cujas transformadas de Laplace são dadas por

(a) $\dfrac{2s}{s^2+1}$ (b) $\dfrac{s-6}{(s-1)^2+4}$ (c) $\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$ (d) $\dfrac{18s-12}{9s^2-1}$

(e) $(s^2-1)^{-2}$ (f) $\dfrac{s+1}{s^2+s-6}$ (g) $\dfrac{1}{(s+1)^4}$ (h) $\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$

**3.** Utilizando a transformada de Laplace, resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $4y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$

(b) $y'' - 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 7$

(c) $y'' + 3y' - 4y = 6e^{2t-2}$, $y(0) = y'(0) = 0$

(d) $y''' - y'' + y' - y = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

(e) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$, sendo

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \le t < 2 \\ 0 & \text{se } t \ge 2 \end{cases}$$

(f) $4y'' + 9y = 9tH_1(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$

(g) $y'' + y = \delta_\pi(t) - \delta_{2\pi}(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

(h) $y'' + y = \delta_\pi(t)\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

onde $\delta_c(t)$ representa a distribuição delta de Dirac centrada em $c$; ou seja, $\delta_c(t) = \delta(t - c)$.

**4.** Sendo $\lambda$ uma constante real e $t_0 > 0$, considere a seguinte equação diferencial:

$$x'' + x = \lambda H_{2\pi}(t) - H_{t_0}(t)$$

Suponha as condições iniciais dadas por $x(0) = x'(0) = 0$.

(a) Obtenha a solução do problema (em função de $t_0$).

(b) Obtenha os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ e de $t_0 > 2\pi$ para os quais $x(t) = 0$ para todo $t > t_0$.

# Soluções

1. (a) $\frac{4-2s}{s^2}$, $s > 0$ (b) $\frac{2s}{s^2+1} + \frac{6}{s^2-4}$, $s > 2$ (c) $\frac{3+s}{s^2+6s+13}$, $s > -3$ (d) $\frac{2e^{-s}}{s^3}$, $s > 0$

   (e) $\frac{1}{(s-a)^2}$, $s > a$ (f) $\frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$, $s > 0$ (g) $\frac{1-e^{-s}}{s}$, $s > 0$

   (h) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} s = \operatorname{arc\,cotg} s$, $s > 0$

2. (a) $2\cos t$ (b) $e^t \cos(2t) - \frac{5}{2} e^t \operatorname{sen}(2t)$ (c) $\frac{t}{\omega^2} - \frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega^3}$ (d) $2\operatorname{ch}\frac{t}{3} - 4\operatorname{sh}\frac{t}{3}$

   (e) $\frac{t}{2}\operatorname{ch} t - \frac{1}{2}\operatorname{sh} t$ (f) $\frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}$ (g) $\frac{t^3}{6}e^{-t}$ (h) $\frac{1}{2\omega^3}\Big(\operatorname{sen}(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)\Big)$

3. A solução, $y(t)$, é dada por:

   (a) $\cos\frac{t}{2} - 4\operatorname{sen}\frac{t}{2}$ (b) $2e^{3t} - e^{-t}$ (c) $e^{-2}\left(e^{2t} - \frac{6}{5}e^t + \frac{1}{5}e^{-4t}\right)$

   (d) $-1 + \frac{1}{2}\left(e^t + \cos t - \operatorname{sen} t\right)$ (e) $\big(1 - \cos(t-1)\big)H_1(t) - \big(1 - \cos(t-2)\big)H_2(t)$
   (f) $H(t-1)\left(t - \frac{2}{3}\operatorname{sen}\frac{3(t-1)}{2} - \cos\frac{3(t-1)}{2}\right)$
   (g) $-\big(H(t-\pi) + H(t-2\pi)\big)\operatorname{sen} t$ (h) $= \big(1 - H(t-\pi)\big)\operatorname{sen} t$

4. (a) $x(t) = \lambda H(t-2\pi)\big(1 - \cos t\big) - H(t-t_0)\big(1 - \cos(t-t_0)\big)$
   (b) $\lambda = 1$ e $t_0 = 2k\pi$, com $k = 2, 3, 4, \ldots$.