

## Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025  
Curso: LEQ, LEAmb, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

### Ficha de Problemas Resolvidos nº 11

#### Equações Diferenciais Parciais

1. Mostrar que a função

$$u(x, t) = e^{mx} e^{-mt}$$

é uma solução da equação de calor

$$u_{xx} + mu_t = 0$$

para qualquer que seja o valor da constante  $m$ .

**Resolução:**

Substituindo  $u(t, x)$  na equação, obtém-se

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{mx} e^{-mt}) + m \frac{\partial}{\partial t} (e^{mx} e^{-mt}) = m^2 e^{mx} e^{-mt} - m^2 e^{mx} e^{-mt} = 0$$

como se queria mostrar.

2. Usar o método de separação de variáveis para determinar a solução dos seguintes problemas.

(a)  $u_t = u_y$  com  $u(0, y) = e^y - 4e^{2y}$ .

(b)  $u = u(x, y)$ , tal que  $u_x = u_y - u$  com  $u(x, 0) = e^{-5x} + 2e^{-7x} - 14e^{13x}$ .

**Resolução:**

(a) Usando o método de separação de variáveis, pretende-se determinar funções  $u(t, y)$  verificando a equação diferencial. Note-se que:

- a equação é homogénea;
- a solução nula é solução da equação mas não verifica a condição inicial e, como tal, não é solução do problema. Mas ainda, esta condição (dita não homogénea) não pode ser incluída no problema a resolver por separação de variáveis.

Começamos por determinar funções não nulas,  $T(t)$  e  $Y(y)$ , tais que  $u(t, y) = T(t)Y(y)$  verifica a equação diferencial. Substituindo em  $u_t = y_y$ , obtém-se:

$$T'(t)Y(y) = T(t)Y'(y) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)}$$

Dado que o primeiro membro é uma função apenas de  $t$  enquanto o segundo é uma função apenas de  $y$ , e que a igualdade se verifica para todos os  $(t, y)$  em  $\mathbb{R}^2$ , então ambos os membros são iguais a uma constante,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Desta forma,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

ou seja,

$$T'(t) = \lambda T(t) \quad \text{e} \quad Y'(y) = \lambda Y(y)$$

Trata-se de equações diferenciais ordinárias facilmente resolúveis, pois ambas são lineares homogêneas de primeira ordem. Assim

$$T(t) = c_1 e^{\lambda t} \quad \text{e} \quad Y(y) = c_2 e^{\lambda y},$$

pelo que

$$u(t, y) = c e^{\lambda(t+y)}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

A resolução anterior não introduziu qualquer restrição aos valores de  $\lambda$ , pois para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$  se obtêm soluções não nulas da forma (1).

Vamos agora determinar os valores das constantes  $c$  e  $\lambda$  de modo a que a condição inicial se verifique. Observa-se que os dados iniciais,

$$u(0, y) = e^y - 4e^{2y}$$

são uma combinação linear (em  $t = 0$ , obviamente) de funções do tipo (1) correspondentes aos valores  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 2$ . Assim sendo, a solução do problema de valor inicial deve ter a forma:

$$u(t, y) = c_1 e^{t+y} + c_2 e^{2(t+y)}.$$

Utilizando os dados iniciais para determinar  $c_1$  e  $c_2$ , obtém-se:

$$u(0, y) = c_1 e^y + c_2 e^{2y} = e^y - 4e^{2y} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1 \quad \text{e} \quad c_2 = -4.$$

A solução do problema dado é, pois:

$$u(t, y) = e^{t+y} - 4e^{2(t+y)}.$$

**(b)** Usando o método de separação de variáveis, pretende-se determinar funções  $u(x, y)$  verificando a equação diferencial. Note-se que:

- a equação é homogênea;

- a solução nula é solução da equação mas não verifica a condição inicial (em  $y = 0$ ) e, como tal, não é solução do problema. Mas ainda, esta condição (que é não homogéna) não pode ser incluída no problema a resolver por separação de variáveis.

Começamos por determinar funções não nulas,  $X(x)$  e  $Y(y)$ , tais que  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  verifica a equação diferencial. Substituindo em  $u_x = u_y - u$ , obtém-se:

$$X'(x)Y(y) = X(x)Y'(y) - X(x)Y(y) \Leftrightarrow \frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} - 1$$

Dado que o primeiro membro é uma função apenas de  $x$ , enquanto o segundo é uma função apenas de  $y$ , e que a igualdade se verifica para todo o  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$ , então ambos os membros são iguais a uma constante,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Desta forma, tem-se que

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{Y'(y)}{Y(y)} - 1 = \lambda$$

Resolvendo ambas as equações (que são equações ordinárias lineares de primeira ordem lineares, ambas homogéneas) obtém-se

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x}$$

e

$$\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda + 1 \Leftrightarrow Y(y) = c_2 e^{(\lambda+1)y}$$

com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Assim, qualquer função da forma

$$u(x, y) = c e^{\lambda x} e^{(\lambda+1)y}, \quad \text{com } c \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (2)$$

é solução da equação diferencial.

Vamos agora calcular as constantes de modo a que a condição inicial se verifique. Observa-se que os dados na fronteira

$$u(x, 0) = e^{-5x} + 2e^{-7x} - 14e^{13x}$$

são uma combinação linear (em  $y = 0$ , obviamente) de funções do tipo (2) correspondentes aos valores  $\lambda = -5$ ,  $\lambda = -7$  e  $\lambda = 13$ . Assim sendo, a solução do problema de valor inicial deve ter a forma:

$$u(x, y) = c_1 e^{-5x} e^{-4y} + c_2 e^{-7x} e^{-6y} + c_3 e^{13x} e^{14y}.$$

Utilizando os dados iniciais para determinar  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ , obtém-se:

$$u(x, 0) = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-7x} + c_3 e^{13x} = e^{-5x} + 2e^{-7x} - 14e^{13x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

pelo que  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$  e  $c_3 = -14$ . Concluímos então que

$$u(t, y) = e^{-5x} e^{-4y} + 2e^{-7x} e^{-6y} - 14e^{13x} e^{14y}$$

é solução do problema dado.

3. Determinar os valores próprios e as funções próprias dos seguintes problemas de valor de fronteira (PVF).

(a)  $y'' - \lambda y = 0$  com  $y'(0) = 0$ ,  $y(L) = 0$

(b)  $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0$  com  $y(0) = 0$  e  $y(1) = 0$ .

**Resolução:**

(a) Vamos, em primeiro lugar, determinar a solução geral da equação diferencial. Utilizando a notação  $Dy = y'$ , a equação toma a forma:

$$y'' - \lambda y = 0 \Leftrightarrow (D^2 - \lambda)y = 0.$$

O polinómio característico associado é, pois,  $P(R) = R^2 - \lambda$ . Vamos, então, considerar os três casos que se seguem.

**Caso 1:**  $\lambda = 0$ . O polinómio característico tem 0 como raiz dupla, pelo que a equação  $D^2y = 0$  admite como base do espaço de soluções (por exemplo)  $\mathcal{B} = \{1, x\}$ . Desta forma, a solução geral da equação é

$$y(x) = a + bx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Utilizando as condições de fronteira para determinar as constantes  $a$  e  $b$ :

$$\begin{aligned} y'(0) = 0 &\Rightarrow (a + bx)' \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow b = 0 \\ y(L) = 0 &\Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

Conclui-se que a única solução do PVF no caso  $\lambda = 0$  é a solução nula, pelo que  $\lambda = 0$  não é valor próprio do problema.

**Caso 2:**  $\lambda > 0$ . O polinómio característico tem como raízes (ambas de multiplicidade 1)  $\pm\mu$ , onde  $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\lambda}$ . Assim sendo, a equação  $(D^2 - \mu^2)y = (D - \mu)(D + \mu)y = 0$  admite como base do espaço de soluções  $\mathcal{B} = \{e^{\mu x}, e^{-\mu x}\}$ , pelo que a sua solução geral é dada por

$$y(x) = ae^{\mu x} + be^{-\mu x}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Utilizando as condições de fronteira para determinar as constantes  $a$  e  $b$ :

$$\begin{aligned} y'(0) = 0 &\Rightarrow (ae^{\mu x} + be^{-\mu x})' \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \mu(a - b) = 0 \Rightarrow b = a \\ y(L) = 0 &\Rightarrow a(\underbrace{e^{\mu L} + e^{-\mu L}}_{>0}) = 0 \Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

Tem-se então que  $a = b = 0$ , donde se conclui que a única solução do PVF no caso  $\lambda > 0$  é a solução nula. Desta forma, qualquer que seja  $\lambda > 0$ ,  $\lambda$  não é valor próprio do problema.

**Caso 3:**  $\lambda < 0$  As raízes do polinómio característico são os números complexos conjugados

$$\pm i\sqrt{-\lambda} = \pm i\mu, \quad \text{onde } \mu = \sqrt{-\lambda} > 0, \quad \lambda = -\mu^2$$

Desta forma, a equação diferencial  $(D^2 + \mu^2)y = (D - i\mu)(D + i\mu)y = 0$  admite como base do espaço de soluções  $\mathcal{B} = \{\sin(\mu x), \cos(\mu x)\}$ , pelo que a sua solução geral é dada por

$$y(x) = a\sin(\mu x) + b\cos(\mu x), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Utilizando as condições de fronteira para determinar as constantes  $a$  e  $b$ :

$$y'(0) = 0 \Rightarrow (a\sin(\mu x) + b\cos(\mu x))' \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \mu a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow b\cos(\mu L) = 0 \Rightarrow b = 0 \vee \cos(\mu L) = 0$$

As soluções não nulas não podem verificar  $a = b = 0$ , pelo que é necessário que

$$\cos(\mu L) = 0 \Rightarrow \mu L = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow \mu = \frac{\pi}{2L} + \frac{n\pi}{L} = \frac{(1 + 2n)\pi}{2L}$$

com  $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  (note que  $\mu > 0$ ). Como  $b$  pode então ser um número real arbitrário, obtêm-se as seguintes soluções não nulas do PVF:

$$y(x) = b \cos \frac{(1 + 2n)\pi x}{2L}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}_0.$$

Para  $\mu L \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \forall n \in \mathbb{N}_0$  então obrigatoriamente  $b = a = 0$ , pelo que a única solução existente, nesses casos, é a solução nula.

Podemos então concluir que os valores próprios do problema são

$$\lambda_n = -\frac{(1 + 2n)^2 \pi^2}{4L^2}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}_0,$$

sendo o espaço das funções próprias associadas a este  $\lambda_n$  gerado pela função:

$$y_n(x) = \cos \frac{(1 + 2n)\pi x}{2L}.$$

**(b)** A equação característica associada é

$$R^2 - 2R + (1 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow R = 1 \pm \sqrt{-\lambda}$$

Separámos o estudo das soluções em três casos, dependendo do tipo de raízes encontradas.

**Caso 1:**  $\lambda = 0$ . O polinómio característico tem uma raiz  $R = 1$  de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Usando as condições de fronteira para determinar  $A$  e  $B$ , tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = Bxe^x$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow Be = 0 \Rightarrow B = 0$$

Resulta que as únicas soluções do problema são nulas, pelo que  $\lambda = 0$  não é valor próprio.

**Caso 2:**  $\lambda < 0$ . Seja  $\omega = \sqrt{-\lambda} \geq 0$ , o que implica que  $\lambda = -\omega^2$ . O polinómio característico tem duas raízes reais distintas,  $R = 1 \pm \omega$ , pelo que a solução geral da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{(1+\omega)x} + Be^{(1-\omega)x} = e^x (Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x})$$

Usando as condições de fronteira para determinar  $A$  e  $B$ , tem-se que

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow y(x) = Ae^x (e^{\omega x} - e^{-\omega x}) \\ y(1) = 0 &\Rightarrow Ae^{\left(\underbrace{e^\omega - e^{-\omega}}_{>0}\right)} = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow B = -A = 0 \end{aligned}$$

Resulta pois que as únicas soluções do problema são nulas, pelo que  $\lambda < 0$  não é valor próprio do problema.

**Caso 3:**  $\lambda > 0$ . Seja  $\omega = \sqrt{\lambda} > 0$ , o que implica que  $\lambda = \omega^2$ . O polinómio característico tem duas raízes complexas conjugadas,  $R = 1 \pm i\omega$ , pelo que a solução geral da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^x \text{sen}(\omega x) + Be^x \text{cos}(\omega x)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = Ae^x \text{sen}(\omega x) \\ y(1) = 0 &\Rightarrow Ae^{\text{sen} \omega} = 0 \Rightarrow A = 0 \vee \omega = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(note que  $\omega > 0$ ). Para cada  $\lambda = \omega^2 = n^2\pi^2$  obtêm-se as soluções não nulas

$$y(x) = Ae^x \text{sen}(n\pi x).$$

Podemos então concluir que os valores próprios do problema são

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad \text{para } n \in \mathbb{N},$$

sendo o espaço das funções próprias associado a este valor próprio gerado pela função

$$y_n(x) = e^x \text{sen}(n\pi x).$$

#### 4. Determine a solução da equação diferencial parcial

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad x \in ]0, \pi[ \text{ e } t > 0$$

que verifica as condições de fronteira

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

e a condição inicial

$$u(x, 0) = \text{sen}(x) - 2 \text{sen}(5x).$$

**Resolução:**

Para resolver o problema de valores na fronteira, utilizaremos o método de separação de variáveis. Assim, considerando  $u(t, x) = T(t)X(x)$  e substituindo na equação, obteremos

$$T'(t)X(x) = \alpha^2 T(t)X''(x) \Rightarrow \frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X}$$

Sendo o primeiro membro da equação uma função de  $t$  e o segundo membro uma função de  $x$ , para que a igualdade se verifique para todo  $t > 0$  e  $x \in ]0, \pi[$ , tem de existir  $\lambda \in \mathbb{R}$  para o qual

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$u(t, 0) = 0 \Rightarrow T(t)X(0) = 0 \Rightarrow T(t) \equiv 0 \text{ ou } X(0) = 0$$

dado que  $T(t)$  não pode ser a função nula

$$u(t, 0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$u(t, \pi) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } x \in ]0, \pi[ \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

e

$$T' = \lambda \alpha^2 T \quad (4)$$

Para resolver (3), temos que procurar os valores e funções próprias associadas. O polinómio característico associado é

$$R^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow R = \pm\sqrt{\lambda}$$

Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$  A equação característica tem uma solução  $R = 0$  de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A + Bx$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = Bx$$

Por outro lado

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow B\pi = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \quad \forall x$$

pelo que  $\lambda = 0$  não é valor próprio.

$\lambda > 0$  ( $\lambda = \mu^2$ ) A equação característica tem duas soluções reais distintas  $R = \pm\mu$ , pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow y(x) = A(e^{\mu x} - e^{-\mu x})$$

Por outro lado

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow A(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } \mu = -\mu \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \forall x$$

pelo que qualquer  $\lambda > 0$  não é valor próprio.

$\lambda < 0$  ( $\lambda = -\mu^2$ ) A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas  $R = \pm i\mu$ , pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A \operatorname{sen}(\mu x) + B \operatorname{cos}(\mu x)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = A \operatorname{sen}(\mu x)$$

Por outro lado

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow A \operatorname{sen} \pi \mu = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } \pi \mu = k\pi \quad k \in \mathbb{N}$$

tem-se então que para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_k = -k^2$  é valor próprio da equação associado à função própria  $X_k(x) = \operatorname{sen}(kx)$ . Note que todas as outras — dadas por  $y(x) = A \operatorname{sen}(\mu x)$  — são combinações lineares de  $X_k(x)$ .

Podemos agora resolver (4), apenas para os valores de  $\lambda$  encontrados anteriormente (pois para outros valores de  $\lambda$  a solução de (3) é a solução nula que não nos interessa.). Assim, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$T'(t) = -\alpha^2 k^2 T \Rightarrow T(t) = C e^{-\alpha^2 k^2 t}$$

A menos de combinação linear, tomamos  $T(t) = e^{-\alpha^2 k^2 t}$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , a função

$$u_k(t, x) = T_k(t) X_k(x) = e^{-\alpha^2 k^2 t} \operatorname{sen}(kx)$$

é solução do problema de valores na fronteira, e conseqüentemente qualquer combinação linear também o será. Desta forma:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\alpha^2 k^2 t} \operatorname{sen}(kx).$$

Para calcular as constantes  $A_k$ , utilizamos a condição inicial:

$$u(0, x) = \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}(5x).$$

Assim

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{sen}(kx) = \text{sen } x - 2\text{sen}(5x)$$

Facilmente se verifica que

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1 \\ -2 & \text{se } k = 5 \\ 0 & \text{se } k \neq 1, k \neq 5 \end{cases}$$

pelo que a solução do problema de valor inicial e valores na fronteira é

$$u(t, x) = e^{-\alpha^2 t} \text{sen}(x) - 2e^{-25\alpha^2 t} \text{sen}(5x)$$

5. (a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para  $t \geq 0$  e para  $x \in [0, 1]$  de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{se } x \in ]0, 1[, t > 0 \\ u(0, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(1, t) = \text{sen } 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

- b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = 3\text{sen}(2\pi x) - 7\text{sen}(4\pi x) + \text{sen } x \quad \text{para } x \in ]0, 1[.$$

**Resolução:**

(a) Dado que as condições de fronteira não são homogêneas, vamos considerar

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t)$$

em que  $v(x)$  é a solução do problema

$$\begin{cases} 0 = v''(x) + v(x) & \text{se } x \in ]0, 1[ \\ v(0) = 0 \\ v(1) = \text{sen } 1 \end{cases} \quad (5)$$

e  $w(x, t)$  é solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w & \text{se } x \in ]0, 1[, t > 0 \\ w(0, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ w(1, t) = 0 & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (6)$$

Começemos por resolver o problema (5). Trata-se de uma equação ordinária linear de coeficientes constantes, cujas raízes do polinómio característico são

$$R^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow R = \pm i.$$

Assim sendo, a solução geral da equação é

$$v(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Dado que  $v(0) = 0$ , tem-se que  $A = 0$ , pelo que  $v(x) = B\sin x$ . Por outro lado, dado que  $v(1) = \sin 1$  tem-se  $B = 1$  e

$$v(x) = \sin x.$$

Para resolver o problema (6) utilizaremos o método de separação de variáveis. Assim, considerando  $w(x, t) = T(t)X(x)$  e substituindo na equação, obtemos

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) + T(t)X(x) \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} + 1$$

Sendo o primeiro membro da equação uma função de  $t$  e o segundo membro uma função de  $x$ , para que a igualdade se verifique para todo  $t > 0$  e  $x \in ]0, 1[$  tem que existir  $\lambda \in \mathbb{R}$  para o qual

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - 1 = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$w(0, t) = 0 \Rightarrow T(t)X(0) = 0 \Rightarrow T(t) \equiv 0 \text{ ou } X(0) = 0;$$

dado que  $T(t)$  não pode ser a função nula,

$$w(0, t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$w(1, t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } x \in ]0, 1[ \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

e

$$T' = (1 + \lambda)T \quad (8)$$

Para resolver (7), temos que procurar os valores e funções próprias do problema. O polinómio característico da equação diferencial tem as raízes:

$$R^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow R = \pm\sqrt{\lambda}.$$

Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$  A equação característica tem uma solução  $R = 0$  de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A + Bx$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = Bx$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \forall x$$

pelo que  $\lambda = 0$  não é valor próprio.

$\lambda > 0$  ( $\lambda = \mu^2$ ) A equação característica tem duas soluções reais distintas  $R = \pm\mu$ , pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow y(x) = A(e^{\mu x} - e^{-\mu x})$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow A(e^{\mu} - e^{-\mu}) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } \mu = -\mu \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \forall x$$

pelo que qualquer  $\lambda > 0$  não é valor próprio.

$\lambda < 0$  ( $\lambda = -\mu^2$ ) A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas  $R = \pm i\mu$ , pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A \operatorname{sen}(\mu x) + B \operatorname{cos}(\mu x)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = A \operatorname{sen}(\mu x)$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow A \operatorname{sen} \mu = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } \mu = k\pi \quad k \in \mathbb{N}$$

tem-se então que para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_k = -k^2\pi^2$  é valor próprio da equação associado às funções próprias  $X(x) = B \operatorname{sen}(k\pi x)$ . A menos de combinação linear, podemos tomar  $X_k(x) = \operatorname{sen}(k\pi x)$

Podemos agora resolver (8), apenas para os valores de  $\lambda$  encontrados anteriormente (pois para outros valores de  $\lambda$  a solução de (7) é a solução nula, que não nos interessa.). Assim, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$T'(t) = (1 - k^2\pi^2)T \Leftrightarrow T(t) = Ce^{(1-k^2\pi^2)t}$$

Podemos então tomar  $T_k(t) = e^{(1-k^2\pi^2)t}$ .

Concluimos que para cada  $k \in \mathbb{N}$ , a função

$$w_k(x, t) = T_k(t)X_k(x) = e^{(1-k^2\pi^2)t} \operatorname{sen}(k\pi x)$$

é solução do problema de valores na fronteira (6), e conseqüentemente qualquer combinação linear também o será; ou seja,

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{(1-k^2\pi^2)t} \text{sen}(k\pi x)$$

Finalmente

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t) = \text{sen } x + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{(1-k^2\pi^2)t} \text{sen}(k\pi x)$$

é a solução pedida.

(b) Pela alínea anterior

$$u(x, 0) = \text{sen } x + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{sen}(k\pi x) = 3\text{sen}(2\pi x) - 7\text{sen}(4\pi x) + \text{sen } x$$

pelo que teremos que determinar os coeficientes  $A_k$  de modo a que

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{sen}(k\pi x) = 3\text{sen}(2\pi x) - 7\text{sen}(4\pi x)$$

Facilmente se verifica que

$$A_k = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 2 \\ -7 & \text{se } k = 4 \\ 0 & \text{se } k \neq 2, k \neq 4 \end{cases}$$

pelo que a solução do problema de valor inicial e valores na fronteira é

$$u(x, t) = \text{sen } x + 3e^{(1-4\pi^2)t} \text{sen}(2\pi x) - 7e^{(1-16\pi^2)t} \text{sen}(4\pi x)$$

6. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \quad x \in ]0, L[, \quad \text{com} \quad \begin{cases} u_x(t, 0) = u_x(t, L) = 0 \\ u(t, x) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

**Resolução:**

Para resolver o problema de valores na fronteira, utilizaremos o método de separação de variáveis. Assim, considerando  $u(t, x) = T(t)X(x)$  e substituindo na equação, obteremos

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) - T(t)X(x) \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} - 1$$

Sendo o primeiro membro da equação uma função de  $t$  e o segundo membro uma função de  $x$ , para que a igualdade se verifique para todo  $t > 0$  e  $x \in ]0, L[$ , tem de existir  $\lambda \in \mathbb{R}$  para o qual

$$\frac{T'}{T} + 1 = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$u_x(t, 0) = 0 \Rightarrow T(t)X'(0) = 0 \Rightarrow T(t) \equiv 0 \text{ ou } X'(0) = 0$$

dado que  $T(t)$  não pode ser a função nula

$$u(t, 0) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$u_x(t, L) = 0 \Rightarrow X'(L) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } x \in ]0, L[ \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

e

$$T' = (\lambda - 1)T \quad (10)$$

Para resolver (9), temos que procurar os valores e funções próprias associadas. O polinómio característico associado é

$$R^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow R = \pm\sqrt{\lambda}$$

Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$  A equação característica tem uma solução  $R = 0$  de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A + Bx \Rightarrow y'(x) = B$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y'(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = A$$

Por outro lado  $y'(L) = 0$  verifica-se qualquer que seja  $A$  pelo que  $\lambda = 0$  é valor próprio com funções próprias  $X(x) = A = A \cdot 1$ . A menos de combinação linear, podemos tomar  $X_0(x) = 1$ .

$\lambda > 0$  ( $\lambda = \mu^2$ ) A equação característica tem duas soluções reais distintas  $R = \pm\mu$ , pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} \Rightarrow y'(x) = \mu(Ae^{\mu x} - Be^{-\mu x})$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y'(0) = 0 \Rightarrow A - B = 0 \Rightarrow B = A \Rightarrow y(x) = A(e^{\mu x} + e^{-\mu x})$$

Por outro lado

$$y'(L) = 0 \Rightarrow A(e^{\mu L} - e^{-\mu L}) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } \mu = -\mu \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \forall x$$

pelo que qualquer  $\lambda > 0$  não é valor próprio.

$\lambda < 0$  ( $\lambda = -\mu^2$ ) A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas  $R = \pm i\mu$ , pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A\text{sen}(\mu x) + B\text{cos}(\mu x) \Rightarrow y'(x) = \mu(A\text{cos}(\mu x) - B\text{sen}(\mu x))$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y'(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = B\text{cos}(\mu x)$$

Por outro lado

$$y'(L) = 0 \Rightarrow -B\mu\text{sen} L\mu = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } L\mu = k\pi \quad k \in \mathbb{N}$$

tem-se então que para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$  é valor próprio, podendo tomar para função própria associada  $X_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ .

Podemos agora resolver (10), apenas para os valores de  $\lambda$  encontrados anteriormente (pois para outros valores de  $\lambda$  a solução de (9) é a solução nula, que não nos interessa). Assim, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$T'(t) = \left(-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - 1\right)T \quad \text{pelo que} \quad T_k(t) = e^{\left(-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - 1\right)t}$$

e, para  $\lambda = 0$ ,

$$T'(t) = -T(t) \quad \text{pelo que} \quad T_0(t) = e^{-t}.$$

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , a função

$$u_k(t, x) = T_k(t)X_k(x) = e^{\left(-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - 1\right)t} \cos \frac{k\pi x}{L}$$

é solução do problema de valores na fronteira, assim como

$$u_0(t, x) = e^{-t}$$

Consequentemente qualquer combinação linear também o será, ou seja

$$u(t, x) = A_0 e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\left(-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - 1\right)t} \cos \frac{k\pi x}{L}$$

Para calcular as constantes  $A_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , vamos utilizar a condição inicial

$$u(0, x) = \cos \frac{3\pi x}{L}.$$

Assim

$$u(0, x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{k\pi x}{L} = \cos \frac{3\pi x}{L}$$

Facilmente se verifica que

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{se } k \neq 3 \end{cases}$$

pelo que a solução do problema de valor inicial e valores na fronteira é

$$u(t, x) = e^{\left(-\frac{9\pi^2}{L^2}-1\right)t} \cos \frac{3\pi x}{L}$$

7. A equação de calor bidimensional (isto é, para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ) é dada por

$$u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy})$$

- (a) Supondo que  $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ , determinar as equações diferenciais ordinárias que devem ser satisfeitas por  $X$ ,  $Y$  e  $T$
- (b) Determinar soluções não nulas,  $u(x, y, t)$ , da equação diferencial que satisfaçam as condições de fronteira

$$u(0, y, t) = 0 \quad , \quad u(a, y, t) = 0 \quad , \quad u(x, 0, t) = 0 \quad , \quad u(x, b, t) = 0,$$

onde o domínio do problema é dado por:  $x \in [0, a]$ ,  $y \in [0, b]$  e  $t \geq 0$ .

**Resolução:**

**(a)** Vamos encontrar soluções não nulas da equação do calor bidimensional da forma indicada. Substituindo na equação obtém-se

$$T'(t)X(x)Y(y) = \alpha^2 \left( T(t)X''(x)Y(y) + T(t)X(x)Y''(y) \right)$$

ou seja

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Atendendo a que o primeiro membro é uma função de  $t$  e o segundo membro uma função de  $(x, y)$ , a única forma de a igualdade se verificar para todos os  $t$ ,  $x$  e  $y$  é que ambas sejam igual a uma constante, Assim, para certos valores de  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Repetindo o procedimento com a equação em  $(x, y)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda$$

O primeiro membro é uma função apenas de  $x$ , enquanto o segundo membro uma função apenas de  $y$ . Assim sendo, a única forma de a igualdade se verificar para todos os  $x$  e  $y$  é que ambos os membros da mesma sejam igual a uma constante. Assim, para certos valores de  $\mu \in \mathbb{R}$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \mu \quad \text{e} \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu$$

Os cálculos anteriores mostram que as funções  $T(t)$ ,  $X(x)$  e  $Y(y)$  satisfazem as equações diferenciais

$$T'(t) = \lambda \alpha^2 T(t), \quad X''(x) - \mu X(x) = 0, \quad Y''(y) - (\lambda - \mu)Y(y) = 0,$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são constantes reais.

**(b)** Começando pelas condições de fronteira em  $x = 0$  e  $x = a$ :

$$u(0, y, t) = 0 \Rightarrow T(t)X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow T(t) \equiv 0 \vee X(0) = 0 \vee Y(y) \equiv 0$$

Dado que as opções  $T(t) \equiv 0$  e  $Y(y) \equiv 0$  implicam que a solução  $u(t, x, y) \equiv 0$ , tem-se que  $X(0) = 0$ . Da mesma forma,

$$u(a, y, t) = 0 \Rightarrow X(a) = 0$$

Quanto às condições de fronteira em  $y = 0$  e  $y = b$ , usando os mesmos argumentos:

$$u(x, 0, t) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$$

$$u(x, b, t) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0$$

Obtivemos assim o problema de valores próprios

$$\begin{cases} X''(x) - \mu X(x) = 0 & \text{para } x \in ]0, a[ \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

cujos valores e funções próprias são

$$\mu_n = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad X_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Por seu turno, para cada  $n$  temos que resolver

$$\begin{cases} Y''(y) - \underbrace{(\lambda - \mu_n)}_{\kappa} Y(y) = 0 & \text{para } y \in ]0, b[ \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}$$

Trata-se de um problema de valores próprios, onde  $\kappa$  é o valor próprio associado à solução  $Y(y)$ . Assim sendo, temos

$$\kappa_{n,m} = \lambda_{n,m} - \mu_n = -\frac{m^2\pi^2}{b^2} \Rightarrow \lambda_{n,m} = \left(-\frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{a^2}\right)\pi^2$$

$$\text{e } Y_{n,m}(y) = \text{sen } \frac{m\pi y}{b}.$$

A nossa notação é justificada pelo facto de termos obtido um valor próprio (e correspondente função própria) para cada  $n, m \in \mathbb{N}$ . Finalmente, resolvendo a equação (para cada  $\lambda_{n,m}$  anteriormente calculado)

$$T' = \lambda\alpha^2 T \Rightarrow T(t) = Ce^{\lambda\alpha^2 t},$$

pelo que

$$T_{n,m}(t) = e^{-\left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right)\pi^2\alpha^2 t}$$

As soluções do problema homogéneo que obtivámos pelo método de separação de variáveis são:

$$u_{n,m}(x, y, t) = T_{n,m}(t) X_n(x) Y_{n,m}(y)$$

$$= e^{-\left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right)\pi^2\alpha^2 t} \text{sen } \frac{n\pi x}{a} \text{sen } \frac{m\pi y}{b}, \quad \text{para } n, m \in \mathbb{N}.$$

## 8. Considerar o problema de valores de fronteira

$$y'' + \lambda y = f(t) \quad , \quad y(0) = y(1) = 0 \quad (11)$$

(a) Mostre que se  $\lambda$  for um valor próprio do problema homogéneo, então o problema proposto

- (1) pode não ter solução
- (2) a solução (quando existe) não é única;

(b) Mostrar que este problema tem uma só solução  $y(t)$  se  $\lambda$  não é um valor próprio do problema homogéneo.

**Resolução:**

Os valores próprios e funções próprias para o problema de Dirichlet homogéneo,

$$\begin{cases} (D^2 + \lambda)y = 0, & \text{para } 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

podem-se obter substituindo  $\lambda$  por  $-\lambda$  no problema de valores próprios com condições de fronteira de Dirichlet (resolvido na aula). Resulta assim que os mesmos são:

$$\begin{cases} \lambda_n = n^2\pi^2 \\ y_n(t) = \text{sen}(n\pi t) \end{cases} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Conforme a hipótese desta alínea, admitimos que  $\lambda = p^2\pi^2$ , para algum  $p \in \mathbb{N}$ . Multiplicando ambos os membros da equação diferencial pela função própria associada a  $\lambda$ ,  $y_p(t) = \text{sen}(p\pi t)$ , e integrando entre 0 e 1, obtém-se:

$$\int_0^1 y''(s)\text{sen}(p\pi s) ds + \lambda \int_0^1 y(s)\text{sen}(p\pi s) ds = \int_0^1 f(s)\text{sen}(p\pi s) ds$$

Integrando por partes o primeiro integral, e tendo em conta que  $\text{sen}(p\pi) = \text{sen}0 = 0$  e  $y(0) = y(1) = 0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 y''(s)\text{sen}(p\pi s) ds &= \underbrace{y'(s)\text{sen}(p\pi s)}_0 \Big|_0^1 - p\pi \int_0^1 y'(s)\cos(p\pi s) ds \\ &= \underbrace{-p\pi y(s)\cos(p\pi s)}_0 \Big|_0^1 - p^2\pi^2 \int_0^1 y(s)\text{sen}(p\pi s) ds \\ &= -\lambda \int_0^1 y(s)\text{sen}(p\pi s) ds \end{aligned}$$

Desta forma, se  $y(t)$  for solução do problema então tem-se necessariamente que

$$\int_0^1 f(s)\text{sen}(p\pi s) ds = 0. \quad (13)$$

Em conclusão, se  $\lambda = p^2\pi^2$  para certo  $p \in \mathbb{N}$ :

- (1) Se  $f$  não verificar a condição (13), então o problema não tem solução.
- (2) Se  $f$  verificar a condição (13), e admitindo que existe pelo menos uma solução particular,  $\tilde{y}(t)$ , do problema, então qualquer função da forma

$$y(t) = \tilde{y}(t) + c\text{sen}(p\pi t), \quad \text{com } c \in \mathbb{R},$$

é também solução do problema — isto para qualquer  $c \in \mathbb{R}$ . Note que  $\text{sen}(p\pi t)$  é solução da equação homogénea associada e  $y(0) = y(1) = 0$ .

Note ainda que a condição (13) significa que, para o problema (12) ter solução, é necessário que o coeficiente de ordem  $p$  da série de senos de  $f$  seja nulo.

(b) Vamos procurar uma solução do problema (11) na forma de uma sobreposição de funções próprias do problema homogéneo:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\pi t). \quad (14)$$

De facto, trata-se da representação em série de senos de  $y$  no intervalo  $[0, 1]$ . Fazendo o mesmo com o termo não homogéneo,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{sen}(n\pi t),$$

e substituindo na equação diferencial, obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n^2\pi^2 + \lambda) b_n \text{sen}(n\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{sen}(n\pi t)$$

Temos então que

$$b_n = \frac{f_n}{\lambda - n^2\pi^2} \quad (15)$$

Note que esta solução está bem definida desde que  $\lambda$  não seja um dos valores próprios. Também é necessário que a série defina uma função de classe  $C^2$ . Não iremos aqui discutir este problema; apenas notamos que se  $f$  for de classe  $C^1$  então a série (14) com os coeficientes (15) pode ser derivada termo a termo pelo menos duas vezes. É isso justifica o cálculo, acima efectuado, da solução do problema.

Quanto à unicidade, suponhamos que  $y_1$  e  $y_2$  são duas soluções do problema. Então  $y(t) = y_1(t) - y_2(t)$  satisfaz o problema homogéneo associado (12). Mas como  $\lambda$  não é valor próprio, a única solução do problema homogéneo é  $y(t) \equiv 0$ . Resulta assim que  $y_1 = y_2$ .

## 9. Determinar a solução do problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < 3 \\ u(0, t) = u(3, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < 3 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & 0 < x < 3 \end{cases}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 3 - x & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$

### Resolução:

Dado que as condições de fronteira são nulas e a equação é homogénea, vamos começar por resolver o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < 3 \\ u(0, t) = u(3, t) = 0 & t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & 0 < x < 3 \end{cases} \quad (16)$$

onde também incluímos a condição inicial nula, por forma a facilitar os cálculos. Vamos procurar soluções não nulas de (16) usando o método de separação de variáveis. Consideramos, então,  $u(x, t) = X(x)T(t)$ .

Substituindo na equação

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \Leftrightarrow XT'' = c^2 X''T \Leftrightarrow \frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X}$$

O primeiro membro é uma função de  $t$  e o segundo membro uma função de  $x$ ; a única forma de a igualdade se verificar para todos os  $x \in ]0, 3[$  e  $t > 0$  é que ambas sejam igual a uma constante. Assim, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T''}{c^2 T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Quanto às condições de fronteira em  $x = 0$  e  $x = 3$ , tem-se que

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow T(t)X(0) = 0 \Rightarrow T(t) \equiv 0 \quad \vee \quad X(0) = 0$$

Dado que a opção  $T(t) \equiv 0$  implica  $u(x, t) \equiv 0$ , para obter soluções não nulas tem-se necessariamente que  $X(0) = 0$ . Da mesma forma

$$u(3, t) = 0 \Rightarrow X(3) = 0$$

Quanto à condição inicial homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \Rightarrow T'(0)X(x) = 0 \Rightarrow T'(0) = 0 \quad \vee \quad X(x) \equiv 0$$

Dado que a opção  $X(x) \equiv 0$  implica  $u(x, t) \equiv 0$ , devemos ter  $T'(0) = 0$ . Temos então dois problemas para resolver:

$$(\mathbf{P1}) \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(3) = 0 \end{cases}, \quad (\mathbf{P2}) \begin{cases} T'' - c^2 \lambda T = 0 \\ T'(0) = 0 \end{cases}$$

**(P1)** Trata-se de um problema de valores próprios para a equação  $X'' - \lambda X = 0$  com condições de fronteira de Dirichlet para  $x \in [0, 3]$ . Assim os valores próprios são

$$\lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{9}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

correspondentes às soluções não nulas

$$X_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**(P2)** Trata-se de uma equação de segunda ordem com uma condição inicial. Evidentemente que as soluções deste problema só são relevantes para os casos em que  $\lambda$  é valor próprio de (P1). Vamos, por isso, resolver a equação (para cada  $n \in \mathbb{N}$ )

$$T'' + c^2 \frac{n^2 \pi^2}{9} T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left( D^2 + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{9} \right) T = 0.$$

A sua solução geral, calculada pelo método usual, é

$$T(t) = A \cos \frac{n\pi ct}{3} + B \text{sen} \frac{n\pi ct}{3}$$

Dado que  $T'(0) = 0$ ,

$$T'(0) = \frac{n\pi c}{3} \left( -A \text{sen} \frac{n\pi ct}{3} + B \cos \frac{n\pi ct}{3} \right) \Big|_{t=0} = \frac{n\pi c}{3} B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0.$$

Assim, para a solução de (P2) para cada  $n \in \mathbb{N}$  tomamos

$$T_n(t) = \cos \frac{n\pi ct}{3}$$

Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \text{sen} \frac{n\pi x}{3} \cos \frac{c n \pi t}{3}$$

é solução de (16). Então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \frac{n\pi x}{3} \cos \frac{c n \pi t}{3}$$

é a solução geral de (16).

Finalmente, há que determinar as constantes  $A_n$  de forma a que seja verificada a condição inicial não homogénea, isto é

$$u(0, x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 3 - x & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \frac{n\pi x}{3} = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 3 - x & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$

Para podermos resolver este problema apenas precisamos de escrever a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 3 - x & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$

como uma série de senos em  $[0, 3]$ . Essa série tem a forma

$$SF_{\text{sen}}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \frac{n\pi x}{3}$$

em que para  $n \in \mathbb{N}$  se tem

$$a_n = \frac{2}{3} \int_0^3 f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x \text{sen} \frac{n\pi x}{3} dx + \frac{2}{3} \int_1^2 \text{sen} \frac{n\pi x}{3} dx + \frac{2}{3} \int_2^3 (3-x) \text{sen} \frac{n\pi x}{3} dx$$

Primitivando por partes tem-se que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x \text{sen} \frac{n\pi x}{3} dx = -\frac{3x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^1 + \frac{3}{n\pi} \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{3} dx \\ &= -\frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2} \text{sen} \frac{n\pi}{3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_2^3 (3-x) \text{sen} \frac{n\pi x}{3} dx = -\frac{3(3-x)}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_2^3 - \frac{3}{n\pi} \int_2^3 \cos \frac{n\pi x}{3} dx \\ &= \frac{3}{n\pi} \cos \frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2} \text{sen} \frac{2n\pi}{3} \end{aligned}$$

Por outro lado

$$I_2 = \int_1^2 \text{sen} \frac{n\pi x}{3} dx = -\frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_1^2 = \frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{3} - \frac{3}{n\pi} \cos \frac{2n\pi}{3}$$

Então

$$A_n = a_n = \frac{2}{3} (I_1 + I_2 + I_3) = \frac{6}{n^2\pi^2} \left( \text{sen} \frac{n\pi}{3} + \text{sen} \frac{2n\pi}{3} \right)$$

Finalmente a solução do problema enunciado é

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2\pi^2} \left( \text{sen} \frac{n\pi}{3} + \text{sen} \frac{2n\pi}{3} \right) \cos \frac{n\pi ct}{3} \text{sen} \frac{n\pi x}{3}$$

10. Determinar a solução do seguinte problema de valores de fronteira

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad 0 < x < a \quad , \quad 0 < y < b$$

satisfazendo as condições (de fronteira)

$$u(x, 0) = 0 \quad , \quad u(x, b) = f(x) \quad , \quad u(0, y) = 0 \quad , \quad u(a, y) = f(y).$$

Assumimos que  $f$  uma função contínua em  $[0, \max\{a, b\}]$ .

**Resolução:**

Vamos procurar uma solução do problema na forma  $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$ , onde  $v(x, y)$  é solução de

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0 \\ v(x, 0) = v(x, b) = 0 \quad \text{e} \quad v(0, y) = 0 \\ v(a, y) = f(y) \end{cases} \quad (17)$$

e  $w(x, y)$  é solução de

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0 \\ w(0, y) = w(a, y) = 0 \quad \text{e} \quad w(x, 0) = 0 \\ w(x, b) = f(x) \end{cases} \quad (18)$$

O domínio de ambos os problemas é dado por  $x \in [0, a]$  e  $y \in [0, b]$ .

Vamos começar por resolver (17) considerando para já a equação diferencial (de Laplace) e todas as condições de fronteira nulas. Ou seja, vamos usar o método de separação de variáveis para obter soluções não nulas do problema homogéneo

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0 \\ v(x, 0) = v(x, b) = v(0, y) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

onde  $x \in [0, a]$  e  $y \in [0, b]$ . Vamos então procurar soluções da forma  $u(x, t) = X(x)Y(y)$ . Substituindo na equação de Laplace,

$$v_{xx} = -v_{yy} \quad \Leftrightarrow \quad X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{função só de } x} = \underbrace{-\frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{\text{função só de } y}$$

A única forma de a igualdade (entre funções de variáveis  $x \in ]0, a[$  e  $y \in ]0, b[$  independentes) se verificar é que ambos os membros da igualdade sejam iguais a uma mesma constante. Nesta altura, podemos antever que o problema de valores próprios será em  $Y(y)$  pois, de acordo com (19), este terá duas condições de fronteira nulas enquanto o problema em  $X(x)$  só terá uma. Como tal, colocamos o sinal negativo no primeiro membro.

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

O leitor poderá verificar que se tivéssemos deixado o sinal onde estava, iríamos obter um problema de valores próprios (ligeiramente) diferente daquele cujo resultado pretendemos usar. Assim, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{X''}{X} = -\lambda \quad \text{e} \quad \frac{Y''}{Y} = \lambda$$

Quanto às condições de fronteira em  $y = 0$  e  $y = b$ , tem-se que

$$v(x, 0) = 0 \Rightarrow X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0 \vee Y(0) = 0$$

Dado que  $X(x) \equiv 0$  implica que a solução  $v(x, y)$  seja identicamente nula (que não pretendemos obter aqui), consideramos apenas  $Y(0) = 0$ . Da mesma forma (dado que pretendemos calcular soluções não nulas)

$$v(x, b) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0$$

e, também,

$$v(0, y) = 0 \Rightarrow X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0.$$

Obtivémos assim dois problemas para resolver:

$$(\mathbf{P1}) \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, \end{cases} \quad (\mathbf{P2}) \begin{cases} Y'' - \lambda Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

**(P2)** Trata-se de um problema de valores próprios para a equação  $Y'' - \lambda Y = 0$  com condições de fronteira de Dirichlet, no domínio dado por  $y \in [0, b]$ . Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , os valores próprios são

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

a cada um dos quais corresponde a função própria

$$Y_n(y) = \text{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

**(P1)** Trata-se de uma equação de segunda ordem com uma condição inicial. Nota-se que as soluções deste problema só são relevantes para os casos em que  $\lambda$  é valor próprio de (P2). Vamos então resolver a equação (para cada  $n \in \mathbb{N}$ ):

$$X'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2}X = 0 \Leftrightarrow \left(D^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)X = 0.$$

A sua solução geral é

$$X(x) = A e^{\frac{n\pi x}{b}} + B e^{-\frac{n\pi x}{b}}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Para resolver a equação de Laplace é conveniente escrever esta solução em termos das funções hiperbólicas  $\text{sh} \frac{n\pi x}{b}$ ,  $\text{ch} \frac{n\pi x}{b}$  — que são ambas combinações lineares das exponenciais  $e^{\frac{n\pi x}{b}}$  e  $e^{-\frac{n\pi x}{b}}$  e, por isso, foram uma outra base do espaço de soluções de  $(D^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2})X = 0$ . Assim sendo:

$$X(x) = c \text{sh} \frac{n\pi x}{b} + d \text{ch} \frac{n\pi x}{b}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Dado que  $X(0) = 0$  tem-se que  $d = 0$  e a solução de (P1), para cada  $n \in \mathbb{N}$ , é

$$X_n(x) = \text{sh} \frac{n\pi x}{b}$$

(a menos de combinação linear). Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$v_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \text{sh} \frac{n\pi x}{b}$$

é solução de (19). Formalmente

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \text{sh} \frac{n\pi x}{b}$$

é solução de (19). Para concluir o cálculo da solução de (17), há que determinar as constantes  $c_n$  de modo a que

$$v(a, y) = f(y) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh} \frac{n\pi a}{b} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} = f(y) \quad \forall y \in [0, b]$$

Tem-se então que os valores  $c_n \text{sh} \frac{n\pi a}{b}$  são os coeficientes da série de senos de  $f(y)$  em  $[0, b]$ , ou seja

$$c_n \text{sh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \text{sen} \frac{n\pi y}{b} dy$$

e, como tal,

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \text{sh} \frac{n\pi x}{b}, \quad \text{com } c_n = \frac{2}{b \text{sh} \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b f(y) \text{sen} \frac{n\pi y}{b} dy$$

é a solução de (17).

Para resolver o problema (18), notamos que se trocarmos as variáveis  $x$  e  $y$ , este problema transforma-se no problema (17) (desde que troquemos também os parâmetros  $a$  e  $b$ , pois à partida  $0 \leq x \leq a$  e  $0 \leq y \leq b$ ). Isto decorre da simetria da equação de Laplace relativamente às suas variáveis. Assim sendo, a solução de (18) é

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \text{sh} \frac{n\pi y}{a}, \quad \text{com } d_n = \frac{2}{a \text{sh} \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{a} dx$$