

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 11

Equações Diferenciais Parciais

1 Exercícios Propostos

1. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad x \in (0, \pi), \quad \text{com} \quad \begin{cases} u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin(x) - 2 \sin(5x). \end{cases}$$

2. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \quad x \in (0, L), \quad \text{com} \quad \begin{cases} u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

3. Resolva o seguinte problema de valores de fronteira e inicial para $0 < x < \pi$ e $t > 0$

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad \text{com} \quad \begin{cases} u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin(x) + 3\sin(3x) \end{cases}$$

4. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, \pi]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, \pi[$).

- b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = (\pi - x)x.$$

5. Seja f a função definida no intervalo $]0, 2\pi[$ por $f(x) = x$.

- (a) Determine a série de cossenos da função f .

(b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, & x \in (0, 2\pi) \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

6. Considere a equação de propagação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. (*)

(a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.

(b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0, t) = T_1$, $u(L, t) = T_2$.

(c) Resolva a equação (*) para $0 \leq x \leq 1$ e para as condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(0, t) = 20 \\ u(1, t) = 60 \\ u(x, 0) = 75. \end{cases}$$

7. Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\cos t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o problema de valor inicial e fronteira, para a equação dada, com as condições

$$\begin{cases} u(t, 0) = 0 & t > 0, \\ u(t, \pi) = 0 & t > 0, \\ u(0, x) = \sin x + 2 \sin x \cos x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

8. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \\ u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$, (satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, 1[$) e onde c é uma constante real positiva.

9. Considere o seguinte problema de valores na fronteira, para $(x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{com} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = f(x) \end{cases} \quad (1)$$

sendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2, \\ -1 & \text{se } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Determine a série de cossenos da função f no intervalo $[0, 1]$ e indique para que valores converge a série.
- (b) Resolva o problema (1).

10. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in [0, 1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = \cos(2\pi x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \cos(2\pi y)$$

11. Seja a função f definida no intervalo $(0, \pi)$ por $f(x) = \sin x$.

- (a) Determine a série de Fourier de cossenos da função f .
- (b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada x no intervalo $[-\pi, \pi]$.
- (c) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, & x \in]0, \pi[\\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

12. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u(x, 0, t) = x, \quad u(x, 1, t) = x \\ u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 1 \\ u(x, y, 0) = x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \cos(2\pi(x - y)) - \cos(2\pi(x + y)) \end{cases}$$

para $x, y \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}$.

2 Soluções

1. $e^{-\alpha^2 t} \text{sen}(x) - 2e^{-25\alpha^2 t} \text{sen}(5x)$
2. $e^{-\left(1 + \frac{9\pi^2}{L^2}\right)t} \cos \frac{3\pi x}{L}$
3. $u(x, t) = \text{sen}(t) \text{sen}(x) + \text{sen}(3t) \text{sen}(3x)$
4. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(1+n^2)t} \text{sen}(nx)$
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi} e^{-(1+n^2)t} \text{sen}(nx) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(1+(2n+1)^2)t}}{(2n+1)^3} \text{sen}((2n+1)x)$
5. (a) $\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^{n-1})}{n^2\pi} \cos\left(\frac{n}{2}x\right) = \pi - \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]$
 (b) $\pi e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} e^{-\frac{n^2 t + 2t^2}{4}} \cos\left(\frac{n}{2}x\right)$
6. (b) $u(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$
 (c) $20 + 40x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\pi} (11 - 3(-1)^n) e^{-n^2\pi^2\alpha t} \text{sen}(n\pi x)$
7. $u(t, x) = e^{-\text{sen}t} \text{sen}(x) + e^{-4\text{sen}t} \text{sen}(2x)$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2 c} \text{sen}(n\pi ct) \text{sen}(n\pi x)$
9. (a) $SF_{\cos} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n\pi} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1/2, \\ 0 & \text{se } x = 1/2 \\ -1 & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$
 (b) $u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi \text{sh } n\pi} \cos(n\pi x) \text{sh}(n\pi y)$
10. $C + \frac{\text{ch}(2\pi x) \cos(2\pi y) + \text{ch}(2\pi y) \cos(2\pi x)}{2\pi \text{sh}(2\pi)}, C \in \mathbb{R}$
11. (a) $\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1} \cos(nx) = \frac{2}{\pi} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} \cos(2nx)\right)$
 (b) $|\text{sen } x|$ (c) $\frac{2}{\pi} e^{2t} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(2-4n^2)t}}{4n^2-1} \cos(2nx)$
12. $u(x, y, t) = x + \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \text{sen}(2\pi x) \text{sen}(2\pi y) \text{sen}(2\sqrt{2}\pi t)$