

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Resolvidos nº 10 Séries de Fourier

1. Determine a série de Fourier da função $g(x) = |x|$, no intervalo $[-\pi, \pi]$. Utilize o resultado para calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Resolução:

A função $f(x)$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in [-\pi, 0[\\ x & \text{se } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Como $L = \pi$, a série de Fourier associada a f é da forma

$$SFf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Dado que f é uma função par, então

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi$$

e, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \right) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1) \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0.$$

Assim sendo, a série de Fourier de f é

$$SFf(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} \cos nx$$

Mas, tendo em conta que

$$\cos n\pi - 1 = (-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ -2 & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

a série de Fourier reduz-se aos seus termos com índice par, ou seja:

$$SFf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x)$$

Com a extensão periódica de f a \mathbb{R} é contínua e seccionalmente C^1 , então pelo teorema da convergência pontual

$$SFf(x) = f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]. \quad (1)$$

Para calcular a soma da série numérica pretendida, usamos simplesmente a equação (1) no ponto $x = 0$:

$$0 = f(0) = SFf(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Resulta pois que:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^3 - \pi^2 x$, no intervalo $x \in [-\pi, \pi]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para calcular a soma da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots$$

Resolução:

A série de Fourier associada a h será

$$SFh(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Como h é uma função ímpar, a_0 e a_n , para $n \in \mathbb{N}$ são nulos. Tem-se também, para $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^3 - \pi^2 x) \operatorname{sen} nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{(x^3 - \pi^2 x) \frac{-\cos nx}{n}}_0 \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (3x^2 - \pi^2) \frac{\cos nx}{n} \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (3x^2 - \pi^2) \frac{\cos nx}{n} \, dx \end{aligned}$$

Integrando por partes, de novo:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{(3x^2 - \pi^2) \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}}_0 \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 6x \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \, dx \right) \\ &= \int_0^{\pi} 6x \frac{-\operatorname{sen} nx}{n^2} \, dx \end{aligned}$$

Por fim, fazendo mais uma integração por partes:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left(6x \frac{\cos nx}{n^3} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 6 \frac{\cos nx}{n^3} \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{6\pi \cos n\pi}{n^3} - \underbrace{\frac{6 \operatorname{sen} nx}{n^4}}_0 \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{12(-1)^n}{n^3} \end{aligned}$$

Assim

$$SFh(x) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen} nx$$

Note que $h(x) = x(x^2 - \pi^2) = x(x - \pi)(x + \pi)$ é de classe C^1 e verifica $h(-\pi) = h(\pi)$. Assim, pelo teorema da convergência pontual:

$$SFh(x) = h(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]. \quad (2)$$

Para calcular a soma da série numérica dada, usamos a equação (2) no ponto $x = \frac{\pi}{2}$:

$$12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - \pi^2 \right) = -\frac{3\pi^3}{8}. \quad (3)$$

Tendo em conta que, para $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ (-1)^k & \text{se } n = 2k + 1 \end{cases}$$

então, eliminando os termos nulos (n par) da série (3) obtém-se

$$12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^3} (-1)^k = -12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = -\frac{3\pi^3}{8},$$

o que é equivalente a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

3. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \operatorname{sen} x > 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{sen} x \leq 0 \end{cases}$$

Resolução:

A função f pode ser escrita na forma

$$f(x) = \begin{cases} \vdots \\ 0 & \text{se } x \in]-3\pi, -2\pi[\\ \operatorname{sen} x & \text{se } x \in [-2\pi, -\pi] \\ 0 & \text{se } x \in]-\pi, 0[\\ \operatorname{sen} x & \text{se } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{se } x \in]\pi, 2\pi[\\ \vdots \end{cases} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} |\operatorname{sen} x|$$

pelo que a função f é periódica de período 2π . Assim, a série de Fourier de f é

$$SFf(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{\pi} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} \right) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx \right)$$

Note que $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$ já está na forma de uma série de Fourier com $L = \pi$. Assim, podemos simplesmente determinar a série de Fourier da função par $g(x) = \frac{1}{2}|\operatorname{sen} x|$, pois

$$SFf(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + SFg(x).$$

A série de Fourier da função g é

$$SFg(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sen nx)$$

em que (tendo em conta que g é par e $g(x) = \frac{1}{2}|\sen x| = \frac{1}{2}\sen x$ para $x \in]0, \pi[$)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sen x dx = \frac{2}{\pi}.$$

e

$$b_n = 0, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Para $n > 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sen x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sen(x+nx) + \sen(x-nx)) dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi(n^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Para $n = 1$,

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sen x \cos x dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sen 2x dx = 0.$$

Assim

$$SFf(x) = SFg(x) + \frac{1}{2}\sen x = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi(n^2 - 1)} \cos(nx) + \frac{1}{2}\sen x$$

Visto que

$$(-1)^{n+1} - 1 = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ ímpar} \\ -2 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

e que a função é contínua em \mathbb{R} , seccionalmente C^1 em $[-\pi, \pi]$ e periódica de período 2π , podemos concluir que

$$SFf(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(2kx) + \frac{1}{2}\sen x = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

Resolução:

A série de senos associada a f é

$$S_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\pi x)$$

em que

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \text{sen}(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 \text{sen}(n\pi x) dx = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

A série de senos de f em $[0, 1]$ é, de facto, a série de Fourier da extensão ímpar de f ao intervalo $[-1, 1]$; trata-se, pois, da série de Fourier da função

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-1, 0[\\ 1 & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

pelo que, usando o teorema da convergência pontual,

$$\begin{aligned} S_{\text{sen}} f(x) &= SFg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \text{sen}(n\pi x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \text{sen}((2k-1)\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Quanto à convergência em \mathbb{R} , a série converge para a extensão periódica de g em todos os pontos onde g é contínua, ou seja, em todos os $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Dado que os limites laterais de g nos seus pontos de descontinuidade são ± 1 , então $SFf(x) = 0$ para $x \in \mathbb{Z}$. Desta forma:

$$S_{\text{sen}} f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } 2k-1 < x < 2k \text{ para } k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{se } 2k < x < 2k+1 \text{ para } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

5. Considere a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine:

- (a) a série de Fourier associada a f ;
- (b) a série de senos associada a f ;
- (c) a série de cossenos associada a f .

Resolução:

(a) Considere-se a função $f(x)$ estendida periodicamente a \mathbb{R} . Então o seu período é 1 e $L = \frac{1}{2}$. Note que um intervalo simétrico em torno da origem correspondente a um período da função é, precisamente, $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ — pois tem comprimento 1.

Desta forma, a esta função (como vimos, periódica com $L = \frac{1}{2}$) está associada a série de Fourier

$$SFf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2n\pi x) + b_n \sen(2n\pi x))$$

Devido à periodicidade de f , os integrais abaixo têm o mesmo valor ao longo de qualquer intervalo de comprimento 1:

$$a_0 = \frac{1}{1/2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x dx = 1$$

Identicamente, para $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{1/2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cos(2n\pi x) dx = 2 \int_0^1 f(x) \cos(2n\pi x) dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{1/2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \sen(2n\pi x) dx = 2 \int_0^1 f(x) \sen(2n\pi x) dx$$

Calculando estes coeficientes, tem-se

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 x \cos(2n\pi x) dx \\ &= 2 \left(\frac{x}{2n\pi} \sen(2\pi n x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2n\pi} \int_0^1 \sen(2\pi n x) dx \right) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 x \sen(2n\pi x) dx \\ &= 2 \left(-\frac{x}{2n\pi} \cos(2\pi n x) \Big|_0^1 + \frac{1}{2n\pi} \int_0^1 \cos(2\pi n x) dx \right) \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cos(2\pi n) = -\frac{1}{n\pi} \end{aligned}$$

Temos então que, para $x \in [0, 1]$

$$SFf(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sen(2n\pi x).$$

Dado que $f(x)$ é contínua em $[0, 1]$, podemos concluir que

$$SFf(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in]0, 1[\\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

(b) A série de senos de f é a série de Fourier da extensão ímpar de f ao intervalo $[-1, 1]$. Diferentemente da alínea (a), trata-se da série de Fourier de uma função com período 2 (ou seja, com $L = 1$).

A série de senos associada a f é, pois

$$S_{\text{sen}}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\pi x)$$

em que

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \text{sen}(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 x \text{sen}(n\pi x) dx = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

(c) A série de cosenos de f é a série de Fourier da extensão par de f ao intervalo $[-1, 1]$. Tal como na alínea (b) (e, também, diferentemente da alínea (a)) trata-se da série de Fourier de uma função com período 2 (ou seja, com $L = 1$).

A série de cosenos associada a f é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

onde

$$a_0 = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x dx = 1$$

e para $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1)$$

6. Determinar a série de senos de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado. Indique a sua soma no conjunto indicado.

$$(a) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < a \\ a & \text{se } a \leq x \leq 2a \end{cases} \quad \text{para } x \in [0, 2a].$$

$$(b) g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - x & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{para } x \in [0, 1].$$

Resolução:

(a) A série de senos de f em $[0, 2a]$ é dada por

$$S_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{2a} \right)$$

em que, para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2a} \int_0^{2a} f(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{2a} \right) dx = \frac{1}{a} \int_a^{2a} a \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{2a} \right) dx \\ &= -\frac{2a}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{2a} \right) \Big|_a^{2a} = \frac{2a}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - (-1)^n \right). \end{aligned}$$

Tem-se então que

$$S_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - (-1)^n \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{2a} \right)$$

A série de senos de f é a série de Fourier da extensão ímpar de f ao intervalo $[-2a, 2a]$, ou seja, da função

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} -a & \text{se } -2a \leq x < -a \\ 0 & \text{se } -a \leq x \leq a \\ a & \text{se } a < x \leq 2a. \end{cases}$$

Atendendo aos pontos de continuidade (e descontinuidade) de \hat{f}

$$SF\hat{f}(x) = \begin{cases} -a & \text{se } -2a < x < -a \\ -\frac{a}{2} & \text{se } x = -a \\ 0 & \text{se } -a < x < a \\ \frac{a}{2} & \text{se } x = a \\ a & \text{se } a < x < 2a \\ 0 & \text{se } x = \pm 2a \end{cases}$$

Finalmente, para $x \in [0, 2a]$,

$$S_{\text{sen}} f(x) = SF\hat{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < a \\ \frac{a}{2} & \text{se } x = a \\ a & \text{se } a < x < 2a \\ 0 & \text{se } x = 2a \end{cases}$$

(b) A série de senos de g em $[0, 1]$ é dada por

$$S_{\text{sen}} g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} (n\pi x)$$

em que, para $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = 2 \int_0^1 g(x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x \operatorname{sen}(n\pi x) dx + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx$$

Primitivando por partes, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} x \operatorname{sen}(n\pi x) dx &= -\frac{x}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(n\pi x) dx \\ &= -\frac{1}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx &= -\frac{1-x}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{n\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(n\pi x) dx \\ &= \frac{1}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

Então

$$b_n = \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

e a série pedida é

$$S_{\operatorname{sen}} g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

A série de senos de g no intervalo $[0, 1]$ é a série de Fourier da extensão ímpar de g ao intervalo $[-1, 1]$, isto é, a série de Fourier de

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} -1-x & \text{se } -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ x & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Atendendo a que esta função é contínua e que $\hat{g}(-1) = \hat{g}(1)$, tem-se em particular que

$$S_{\operatorname{sen}} g(x) = g(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

Consideramos agora a extensão periódica, \bar{g} , de \hat{g} a \mathbb{R} . A função \hat{g} é contínua em \mathbb{R} pois, como vimos, \hat{g} é contínua e $\hat{g}(-1) = \hat{g}(1)$. Além disso, \hat{g} é seccionalmente C^1 . Pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier:

$$S_{\operatorname{sen}} g(x) = \bar{g}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

7. Determinar a série de cossenos de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado. Indique as respectivas somas nos intervalos indicados.

$$(a) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{para } x \in [0, 2].$$

$$(b) g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1/2 \\ 1 - x & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{para } x \in [0, 1].$$

Resolução:

(a) A série de cossenos de $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$S_{\cos} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

em que

$$a_0 = \int_0^2 f(x) dx = \int_1^2 dx = 1$$

e, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \int_1^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \left. \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \right|_1^2 = -\frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

Tem-se então que

$$S_{\cos} f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2}$$

A série de cossenos de f no intervalo $[0, 2]$ é a série de Fourier da extensão par de f ao intervalo $[-2, 2]$, isto é, a série de Fourier de

$$f_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ 0 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Atendendo aos pontos de continuidade (e descontinuidade) de f_p , e tendo em conta que $f_p(-2) = f_p(2)$ (e isto acontece sempre com qualquer extensão par) então:

$$SF f_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = \pm 1 \end{cases}$$

Finalmente, para $x \in [0, 2]$,

$$S_{\cos} f(x) = SF f_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

(b) A série de cossenos de $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$S_{\cos} g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

em que

$$a_0 = 2 \int_0^1 g(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x dx + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}$$

e, para $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 2 \int_0^1 g(x) \cos(n\pi x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x \cos(n\pi x) dx + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \cos(n\pi x) dx$$

Primitivando por partes, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} x \cos(n\pi x) dx &= \frac{x}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\ &= \frac{1}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \cos(n\pi x) dx &= \frac{1-x}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{n\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\ &= -\frac{1}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2\pi^2} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Tem-se então que

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2} \left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n \right)$$

e a série de cossenos de g é

$$S_{\cos} g(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2} \left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n \right) \cos(n\pi x).$$

A série de cossenos de g no intervalo $[0, 2]$ é a série de Fourier da extensão par de g ao intervalo $[-2, 2]$, isto é, a série de Fourier de

$$g_p(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 1 - |x| & \text{se } \frac{1}{2} < |x| \leq 1 \end{cases}$$

Atendendo a que esta função é contínua e que $g_p(-1) = g_p(1)$, tem-se que

$$S_{\cos} f(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$