

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 10

Introdução à Separação de Variáveis e Séries de Fourier

1 Exercícios Propostos

1. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ +1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

2. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida em pontos adequados, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

4. Determine a série de Fourier da função definida no intervalo $[-\pi, \pi]$ por

$$j(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Indique a soma da série para $x \in [-\pi, \pi]$.

5. Determine a série de Fourier da função definida no intervalo $[-2, 2]$ por

$$l(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Indique a soma da série para $x \in [-2, 2]$.

6. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.
7. Determine a série de cossenos da função $r(x) = x$ no intervalo $[0, \pi]$, indicando a soma da série em \mathbb{R} .
8. Considere a função $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- (a) Esboçe o gráfico da extensão par de f ao intervalo $[-2, 2]$ e obtenha o desenvolvimento em série de cossenos de f nesse intervalo, indicando a respectiva soma da série em $[0, 2]$.
- (b) Esboçe o gráfico da extensão ímpar de f ao intervalo $[-2, 2]$ e obtenha o desenvolvimento em série de senos de f nesse intervalo, indicando a respectiva soma da série em $[0, 2]$.
9. Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valores fronteira têm soluções não triviais:
- a) $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$
- b) $y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$
10. Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{se } x \in]0, 1[\\ u(0, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(1, t) = 0 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x) - 3 \text{sen}(4\pi x).$$

11. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad x \in]-1, 1[, \quad \text{com} \quad \begin{cases} u(-1, t) = u(1, t) \\ u_x(-1, t) = u_x(1, t) \\ u(x, 0) = 3 \cos(\pi x) - 4 \text{sen}(5\pi x). \end{cases}$$

2 Soluções

1. $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n+1)\pi x)}{2n+1}$
2. $\frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)$. Fazendo $x = 0$ obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
3. $\frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Fazendo $x = L$ obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; fazendo $x = 0$, obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$
4. $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(nx) \right] = \begin{cases} j(x) & \text{se } -\pi < x < \pi \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = \pm\pi \end{cases}$
5. $\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\text{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2} + (1 - \cos \frac{n\pi}{2}) \text{sen} \frac{n\pi x}{2} \right] = \begin{cases} 0 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$
6. $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \text{sen}((2n-1)\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$
7. $SF_{\cos} r(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi} \cos((2n-1)x) =$
 $= \begin{cases} x - 2k\pi & \text{se } 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi \\ 2k\pi - x & \text{se } (2k-1)\pi < x < 2k\pi \end{cases}$ para $k \in \mathbb{Z}$.
8. (a) $SF_{\cos} f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{n^2\pi^2} (1 - \cos \frac{n\pi}{2}) - \frac{2}{n\pi} \text{sen} \frac{n\pi}{2} \right] \cos \frac{n\pi x}{2} =$
 $= \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \end{cases}$.
 (b) $SF_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n + \cos \frac{n\pi}{2}) - \frac{4}{n^2\pi^2} \text{sen} \frac{n\pi}{2} \right] \text{sen} \frac{n\pi x}{2} =$
 $= \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$.
9. (a) $\lambda = n^2\pi^2$, para $n \in \mathbb{Z}^+$
 (b) $\lambda = n^2$, para $n \in \mathbb{Z}_0^+$
10. $u(x, t) = e^t \left(e^{-4\pi^2 t} \text{sen}(2\pi x) - 3e^{-16\pi^2 t} \text{sen}(4\pi x) \right)$
11. $u(x, t) = 3e^{-\alpha^2 \pi^2 t} \cos(\pi x) - 4e^{-\alpha^2 25\pi^2 t} \text{sen}(5\pi x)$