DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/25

Cursos: LEAmb, LEBiol, LEBiom, LEMat, LEQ

Exame (Versão A)

22 de Janeiro de 2025, 8h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 2h.

1. Considere a equação diferencial

$$y^2 - 3xy - 2x^2 + \left(xy - x^2\right)\frac{dy}{dx} = 0 \quad , \qquad y(1) = 0.$$

   (a) (1 val.) Verifique que a equação não é exacta e determine um factor integrante da forma $\mu(x)$.

   (b) (1 val.) Calcule a solução do problema de valor inicial na forma implícita.

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) (2 val.) Determine e^{At}.

   (b) (1 val.) Calcule a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = (1, 2) \end{cases}$$

3. Considere a equação diferencial

$$y''' - 4y' = 8 - 3e^{2t} \quad , \qquad y(0) = -y'(0) = y''(0) = 1.$$

   (a) (1 val.) Escreva a solução geral da equação homogénea.

   (b) (2 val.) Determine a solução do problema.

4. Usando o teorema da divergência, calcule o fluxo do campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = \left(2y, yz, zx\right)$ através das superfícies indicadas.

   (a) (1 val.) A fronteira do sólido

$$V \;=\; \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 < 1 \text{ e } 0 < z < 1\right\}$$

   na direcção da normal unitária exterior a V.

   (b) (2 val.) A superfície

$$S \;=\; \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 0 < z < 1\right\}$$

   na direcção de normal unitária que no ponto $(1, 0, \frac{1}{2})$ tem primeira componente negativa.

5. Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = \left(zy, \frac{3}{2}x^2, e^z\right)$$

   (a) (1 val.) Calcule o rotacional de F.

   (b) (2 val.) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o trabalho realizado F ao longo da curva dada pela intersecção das superfícies $z = 2x^2 + 2y^2$ e $z = 2$, percorrida no sentido horário quando vista do ponto $(0, 0, 100)$.

6. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6tu & \text{se } 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

   sendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

   (a) (1 val.) Determine a série de senos de $f(x)$ em $[0, \pi]$. Denotando a série encontrada por $\mathcal{F}(x)$, calcule $\mathcal{F}(0) - \mathcal{F}(\frac{\pi}{2}) + 3\mathcal{F}(\frac{2\pi}{3})$.

   (b) (2 val.) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira.

7. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{1 + t - y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

   (a) (1 val.) Indique, justificando, os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais se pode concluir que o PVI tem solução unica numa vizinhança de $t_0 = 0$.

   (b) (2 val.) Para $\alpha = \frac{1}{2}$, mostre que o intervalo máximo de solução do PVI é da forma $]\beta, +\infty[$, com $\beta < 0$.