

Cálculo Diferencial e Integral II
Cursos: LEEC, LEMec, LEAN, LEAer, LEFT
Exame Recurso - 18 de Julho de 2022 - 8h
Duração: 2 horas

1. Seja $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}}.$$

(2 val.) Determine, justificando, se existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y)$.

- (2 val.) 2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 tal que

$$Dg(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a e b sabendo que

$$\frac{\partial g}{\partial v}(1, 1) = (2, 3)$$

para $v = (5, 7)$.

- (3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = x + (1 - x^2)y$.

4. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} \sin(x + y) + z + 3w = 3 \\ \sin(x + y) + 3z + w = 1. \end{cases}$$

- (2 val.) (a) Mostre que na vizinhança do ponto $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 1)$ o sistema define (x, z) como função de classe C^1 de (y, w) , ou seja, $(x, z) = f(y, w)$.

- (1 val.) (b) Calcule $Df(0, 1)$.

5. Considere

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 7 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, y \geq 0 \right\}$$

- (2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V usando integrais iterados da forma $\int (\int (\int dx) dy) dz$.

- (3 val.) (b) Calcule o volume de V .

- (2 val.) 6. Considere o campo vetorial $H(x, y) = (-y + 2xyf(x^2y), x + x^2f(x^2y))$, onde a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 . Determine o valor máximo do trabalho realizado pelo campo H ao longo da fronteira de um retângulo R inscrito numa circunferência de raio 1.

- (3 val.) 7. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto simplesmente conexo. Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 tal que para qualquer circunferência $C \subset U$,

$$\oint_C F = 0.$$

Determine se F tem, ou não, de ser gradiente em U .