Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Cursos: LEEC, LEMec, LEAN
Exame 1ª Época - 4 de Julho de 2022 - 13h
Duração: 2 horas

Resolução abreviada

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) (a) Determine o conjunto de pontos em que f é contínua.

Resolução: Pelas propriedades das funções contínuas f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Notando que

$$| f(x,y) | \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq | x |$$

conclui-se que f é contínua na origem.
Portanto f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(2 val.) (b) Calcule, se existirem, as derivadas parciais de f na origem e decida sobre a diferenciabilidade de f nesse ponto.

Resolução: Dado que $f(0,y) = 0$ tem-se $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Sendo $\dfrac{f(x,0)}{x} = \dfrac{x}{|x|}$ a derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ não existe e, portanto, f não é diferenciável na origem.

(2 val.) 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 tal que

$$Df(1,1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Sendo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y,z) = f(\cos x + \operatorname{sen} y, e^{xz}, x^3 y + z^2)$, calcule a derivada de g no ponto $(0,0,1)$.

Resolução: Sendo $h(x,y,z) = (\cos x + \operatorname{sen} y, e^{xz}, x^3 y + z^2)$ temos $g = f \circ h$. Como f e h são funções de classe C^1, usando a regra da derivação composta, obtemos

$$Dg(0,0,1) = Df(h(0,0,1)) \cdot Dh(0,0,1).$$

Note-se que $h(0,0,1) = (1,1,1)$ e

$$Dh(0,0,1) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} x & \cos y & 0 \\ z e^{xz} & 0 & x e^{xz} \\ 3x^2 y & x^3 & 2z \end{bmatrix}_{|(0,0,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$Dg(0,0,1) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 6 & 5 & 14 \end{bmatrix}.$$

(3 val.) 3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y,z) = y$. Determine os extremos de f no conjunto

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4,\ y + z = 1\}.$$

Resolução: Pelo método dos multiplicadores de Lagrange tem-se

$$\begin{cases} 0 = 2\lambda_1 x \\ 1 = \lambda_2 \\ 0 = 2\lambda_1 z + \lambda_2 \\ x^2 + z^2 = 4 \\ y + z = 1. \end{cases}$$

Da primeira equação obtém-se $\lambda_1 = 0$ ou $x = 0$. Da segunda e terceira equações conclui-se que $\lambda_1 \neq 0$. Portanto tem-se $x = 0$.

Da quarta e da quinta equações obtêm-se as soluções $(0,3,-2)$ e $(0,-1,2)$.

Assim, em L, o mínimo de f é -1 no ponto $(0,-1,2)$ e o máximo de f é 3 no ponto $(0,3,-2)$.

(2 val.) 4. Escreva uma expressão para o volume do sólido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y \leq z \leq 2 - y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

usando um integral iterado da forma $\int (\int (\int dx)\, dz)\, dy$.

Resolução:

$$vol(V) = \int_0^1 \int_y^{2-y^2} \int_0^{z-y} 1 \, dx \, dz \, dy.$$

5. Considere o campo vetorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x,y,z) = \left(2xy + z^2, x^2, 2xz\right).$$

(2 val.) (a) Justifique que F é um campo gradiente.

Resolução: Uma vez que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y},$$

o campo F é fechado. Como o seu domínio é $\mathbb{R}^3$, que é simplesmente conexo, o campo F é necessariamente um campo gradiente.

(2 val.) (b) Calcule $\int_C F \cdot dg$, onde a curva $C = \left\{(\cos^2(t), \operatorname{sen}(t)\cos(t), t^2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t \leq \pi\right\}$ é percorrida no sentido de z crescente.

Resolução: Podemos calcular um potencial para F resolvendo as equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy + z^2 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 2xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = x^2 y + xz^2 + C(y,z) \\ x^2 + \dfrac{\partial C}{\partial y} = x^2 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 2xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = x^2 y + xz^2 + C(y,z) \\ C(y,z) = D(z) \\ 2xz + D'(z) = 2xz \end{cases}$$

pelo que $\phi(x,y,z) = x^2y + xz^2$ é um potencial. Desta forma, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos, com $g(t) = (\cos^2(t), \operatorname{sen}(t)\cos(t), t^2)$,

$$\int_C F \cdot dg = \phi(g(\pi)) - \phi(g(0)) = \phi(1,0,\pi^2) - \phi(1,0,0) = \pi^4.$$

(2 val.) 6. Calcule o momento de inércia de um cone homogéneo (ou seja, com densidade de massa constante) com raio da base R, altura h e massa M, em torno do seu eixo de simetria.

Resolução: Podemos assumir que o eixo de simetria é o eixo $0z$ e sendo assim o momento de inércia do cone C é dado por

$$I_{0z} = \int_C \sigma\, d_{0z}^2$$

onde $\sigma(x,y,z) = c$ é a função densidade de massa e $d_{0z}(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ é a distância ao eixo $0z$. Usando coordenadas cilíndricas obtemos

$$I_{0z} = \int_C \sigma\, d_{0z}^2 = c\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{\frac{R}{h}z} \rho^3\, d\rho\, dz\, d\theta = \frac{R^4h}{10}c\pi.$$

Por outro lado a massa do cone é dada por

$$M = c.\,vol(C) = c\int_C 1 = c\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{\frac{R}{h}z} \rho\, d\rho\, dz\, d\theta = \frac{R^2h}{3}c\pi,$$

donde concluimos que

$$c = \frac{3M}{\pi R^2 h}.$$

Logo

$$I_{0z} = \frac{3R^2M}{10}.$$

(3 val.) 7. Mostre que para cada $a \in \mathbb{R}$ suficientemente próximo de 1 existe um único valor $b = b(a)$ próximo de 1 tal que a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tem comprimento 2π. Mostre ainda que $\lim_{a\to 1} \frac{b(a)-1}{1-a} = 1$.

Resolução: Uma parametrização da elipse é dada pela função $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(t) = (a\cos(t), b\operatorname{sen}(t))$, pelo que o seu comprimento é

$$l(a,b) = \int_0^{2\pi} \|g'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2(t) + b^2\cos^2(t)}dt.$$

Pela regra de Leibnitz, $l(a,b)$ é uma função de classe C^1, e

$$\frac{\partial l}{\partial b}(a,b) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial b}\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2(t) + b^2\cos^2(t)}dt = \int_0^{2\pi} \frac{b\cos^2(t)}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2(t) + b^2\cos^2(t)}}dt.$$

Deste modo, temos portanto

$$l(1,1) = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial l}{\partial b}(1,1) = \int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt = \pi \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, sabemos então que existe uma vizinhança do ponto $(a, b) = (1, 1)$ na qual as soluções da equação $l(a, b) = 2\pi$ podem ser escritas na forma $b = b(a)$. Além disso,

$$b'(1) = -\left(\frac{\partial l}{\partial b}(1,1)\right)^{-1} \frac{\partial l}{\partial a}(1,1) = -\frac{\pi}{\pi} = -1,$$

onde $\dfrac{\partial l}{\partial a}(1,1) = \pi$ se calcula de mesma forma que $\dfrac{\partial l}{\partial b}(1,1)$, ou seja,

$$\lim_{a \to 1} \frac{b(a) - 1}{a - 1} = -1.$$