Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Cursos: LEEC, LEMec, LEAN
Exame 1ª Época - 4 de Julho de 2022 - 13h
Duração: 2 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) (a) Determine o conjunto de pontos em que f é contínua.

(2 val.) (b) Calcule, se existirem, as derivadas parciais de f na origem e decida sobre a diferenciabilidade de f nesse ponto.

(2 val.) 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 tal que

$$Df(1,1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Sendo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y,z) = f(\cos x + \operatorname{sen} y, e^{xz}, x^3y + z^2)$, calcule a derivada de g no ponto $(0,0,1)$.

(3 val.) 3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y,z) = y$. Determine os extremos de f no conjunto

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 = 4,\ y+z = 1\}.$$

(2 val.) 4. Escreva uma expressão para o volume do sólido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y \leq z \leq 2-y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

usando um integral iterado da forma $\int(\int(\int dx)\,dz)\,dy$.

5. Considere o campo vetorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x,y,z) = \left(2xy+z^2, x^2, 2xz\right).$$

(2 val.) (a) Justifique que F é um campo gradiente.

(2 val.) (b) Calcule $\displaystyle\int_C F \cdot dg$, onde a curva $C = \left\{(\cos^2(t), \operatorname{sen}(t)\cos(t), t^2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t \leq \pi\right\}$ é percorrida no sentido de z crescente.

(2 val.) 6. Calcule o momento de inércia de um cone homogéneo (ou seja, com densidade de massa constante) com raio da base R, altura h e massa M, em torno do seu eixo de simetria.

(3 val.) 7. Mostre que para cada $a \in \mathbb{R}$ suficientemente próximo de 1 existe um único valor $b = b(a)$ próximo de 1 tal que a elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ tem comprimento 2π. Mostre ainda que $\displaystyle\lim_{a\to 1} \frac{b(a)-1}{1-a} = 1$.