DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2023/2024

2º Teste - Versão B

30 de Novembro de 2023

Cursos: LMAC e LEFT

[6,0 val] 1. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y \operatorname{sen} t}{\cos t} + g(t), \qquad y(0) = 2,$$

em que a função $g :]-\pi/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-1)}{\cos t} & \text{se} \quad t < 1, \\ 0 \quad \text{se} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

Solução: Trata-se dum problema de valor inicial para uma equação linear não homogénea, cujo intervalo máximo de definição é simplesmente ditado pelo máximo intervalo de tempo de definição dos coeficientes do lado direito da equação, em torno da condição inicial, ou seja, $t \in]-\pi/2, \pi/2[$. Evidentemente o coeficiente $a(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \tan t$ e o termo não homogéneo, $g(t)$, são funções contínuas neste intervalo, pelo que o problema de valor inicial tem com certeza solução única, pela teria de resolução de EDOs escalares lineares.

Visto que a função g tem uma expressão definida por ramos, começamos pelo ramo que inclui o instante de tempo inicial $t_0 = 0$, ou seja, para $t \in]-\pi/2, 1[$. A equação é, neste intervalo, dada por

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y \operatorname{sen} t}{\cos t} + \frac{(t-1)}{\cos t}.$$

Como habitualmente, passamos o termo em y para o lado esquerdo da equação e multiplicamo-la por um fator integrante $\mu(t) \neq 0$

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} - \mu(t)\frac{y \operatorname{sen} t}{\cos t} = \mu(t)\frac{(t-1)}{\cos t},$$

de forma a escrever o lado esquerdo como uma derivada um produto

$$\frac{d(u(t)y(t))}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y(t),$$

ou seja, tal que μ satisfaz a EDO linear homogénea

$$\frac{d\mu}{dt} = -\mu(t)\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t},$$

donde

$$\mu(t) = e^{-\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} dt} = e^{\log(\cos t)} = \cos t.$$

(Observe-se que no intervalo em questão, $t \in]-\pi/2, 1[$, a função $\cos t$ é positiva.)

Assim, tem-se então

$$\frac{d(\cos t \; y(t))}{dt} = g(t) \cos t \Leftrightarrow \frac{d(\cos t \; y(t))}{dt} = t - 1,$$

e agora integrando desde o instante inicial $t_0 = 0$ até qualquer outro $t \in]-\pi/2, 1[$, obtém-se

$$\int_{t_0=0}^{t} \frac{d(\cos s \; y(s))}{ds} ds = \int_{t_0=0}^{t} (s-1)\, ds \Leftrightarrow y(t)\cos t - y(0) = \frac{t^2}{2} - t,$$

concluindo-se que

$$y(t) = \frac{1}{\cos t}\left(2 + \frac{t^2}{2} - t\right),$$

para $t \in]-\pi/2, 1[$.

Finalmente, para $t > 1$ a equação torna-se homogénea, visto que $g(t) = 0$ para $t \in [1, \pi/2[$. E como a solução é garantidamente de classe C^1 no seu intervalo máximo de definição $t \in]\pi/2, \pi/2[$ é, em particular, contínua no ponto $t = 1$ que podemos considerar como condição inicial para o ramo homogéneo $t \geq 1$ da equação. O valor que a solução aí toma é obtido pelo ramo já calculado, da parte não homogénea, para $t < 1$, ou seja, $y(1) = \lim_{t \to 1^-} y(t) = \frac{1}{\cos 1}\left(2 + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{3}{2\cos 1}$.

Agora, a solução do problema de valor inicial homogéneo

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y \operatorname{sen} t}{\cos t}, \qquad y(1) = \frac{3}{2\cos 1},$$

é simplesmente dado por

$$y(t) = Ce^{\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} dt} = Ce^{-\log(\cos t)} = \frac{C}{\cos t},$$

com C a satisfazer

$$y(1) = \frac{C}{\cos 1} = \frac{3}{2\cos 1},$$

ou seja, $C = 3/2$.

Obtemos assim a solução $y :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$, de classe C^1, dada por

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos t}\left(2 + \dfrac{t^2}{2} - t\right) & \text{se} \quad t < 1, \\ \\ \frac{3}{2\cos t} & \text{se} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

2. Seja $\alpha(x)$ uma função real diferenciável e considere a equação diferencial ordinária

$$2\alpha(x)y + (x\alpha(x) - 2y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

[3,0 val] (a) Determine a forma geral de $\alpha(x)$ para que a equação seja exata.

[4,0 val] (b) Para $\alpha(x) = x$ determine a solução do problema de valor inicial $y(-2) = 2 - \sqrt{3}$ e indique o seu intervalo máximo de definição.

Solução:

(a) Para que a equação seja exata, o campo vetorial $(2\alpha(x)y, x\alpha(x) - 2y)$ tem de ser necessariamente fechado, ou seja,

$$\frac{\partial(2\alpha(x)y)}{\partial y} = \frac{\partial(x\alpha(x) - 2y)}{\partial x} \Rightarrow 2\alpha(x) = \alpha(x) + x\alpha'(x) \Rightarrow \alpha'(x) = \frac{1}{x}\alpha(x),$$

tratando-se portanto duma equação linear homogénea para $\alpha(x)$ cuja solução geral é $\alpha(x) = Ce^{\int \frac{1}{x}} = Cx$, para qualquer $C \in \mathbb{R}$.

Em sentido inverso, testando $\alpha(x) = Cx$, verifica-se que o campo vetorial $(2Cxy, Cx^2 - 2y)$ é C^∞ em $\mathbb{R}^2$, que é um domínio simplesmente conexo, e é fechado, pelo que terá com certeza um potencial escalar e a equação é por isso exata.

(b) O caso $\alpha(x) = x$ corresponde a $C = 1$, na família geral de funções $\alpha(x)$ da alínea anterior. Assim, temos a certeza de poder encontrar um potencial $\Phi(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Primitivando a primeira destas equações em ordem a x obtemos

$$\Phi(x, y) = x^2y + c(y),$$

em que $c(y)$ é uma função apenas de y. Substituindo este Φ já parcialmente encontrado, na segunda equação do potencial

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^2 - 2y \Rightarrow x^2 + c'(y) = x^2 - 2y \Rightarrow c'(y) = -2y \Rightarrow c(y) = -y^2 + c.$$

O potencial é assim $\Phi(x, y) = x^2y - y^2 + c$, e a solução geral na forma implícita

$$x^2y - y^2 + c = 0.$$

Pela condição inicial obtemos agora o valor de c,

$$x_0^2y_0 - y_0^2 + c = 0 \Leftrightarrow (-2)^2(2 - \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})^2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1.$$

e a confirmação de que o teorema da função implícita garante a existência duma solução diferenciável única, numa vizinhança dessa condição inicial, visto que $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0^2 - 2y_0 = (-2)^2 - 2(2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \neq 0$. Esta solução pode, na verdade, obter-se explicitamente, visto que a equação cartesiana implícita é um polinómio de segundo grau em y

$$x^2y - y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 - 4}}{2}.$$

A condição inicial, por fim, determina que se escolha a solução com o sinal $-$ na fórmula resolvente, pelo que

$$y(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x^4 - 4}}{2},$$

e o intervalo máximo de definição corresponde à condição $x^4 - 4 > 0$, ou seja, $x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ que, novamente pelo instante inicial ser $x_0 = -2$, corresponde ao intervalo $]-\infty, -\sqrt{2}[$.

3. Considere o problema de Cauchy

$$y' = \frac{3 + \cos y}{t^2 + y^2} \qquad y(1) = 1.$$

[2,0 val] (a) Determine as duas primeiras iterações de Picard, $y_0(t)$ e $y_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

[2,0 val] (b) Justifique a existência e unicidade local de solução deste problema de valor inicial.

[3,0 val] (c) Usando um argumento de comparação, prove que a solução está definida para todo o $t \in [1, +\infty[$.

Solução:

(a) A iteração $y_0(t)$ de Picard é simplesmente a função constante igual à condição inicial, ou seja, $y_0(t) = 1$. A iteração seguinte, $y_1(t)$ já resulta da aplicação da iteração $y_0(t)$ ao lado direito da equação, e à correspondente integração a partir do instante inicial

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0=1}^{t} \frac{3 + \cos y_0(s)}{s^2 + y_0^2(s)} ds = 1 + \int_{t_0=1}^{t} \frac{3 + \cos 1}{s^2 + 1} ds \\ &= 1 + (3 + \cos 1)(\arctan t - \arctan 1) = 1 + (3 + \cos 1)(\arctan t - \pi/4). \end{aligned}$$

(b) A função que define a equação

$$f(t, y) = \frac{3 + \cos y}{t^2 + y^2},$$

é evidentemente C^∞ no seu domínio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, por ser a soma e quociente de funções infinitamente diferenciáveis, à exceção do ponto onde o denominador se anula. Em particular é contínua em (t, y) e localmente lipschitziana na variável y neste domínio, onde se encontra a condição inicial $(t_0, y_0) = (1, 1)$. Pelo teorema de Picard-Lindelöf conclui-se assim que existe, e é única, uma solução local do problema de valor inicial, numa vizinhança $t \in]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$ do instante inicial $t_0 = 1$, para algum $\varepsilon > 0$.

(c) A solução, que provámos que existe, e é única, na alínea b), é prolongável a um intervalo máximo de existência com o seu gráfico no domínio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, tendo, portanto, só as seguintes alternativas para $t > 1$: ou explodir $\lim_{t \to T^-} y(t) = \pm\infty$

em tempo finito, para algum $t < T < +\infty$, ou existir até tempo infinito. Para $t \geq 1$, têm-se evidentemente as duas seguintes desigualdades

$$0 < \frac{3 + \cos y}{t^2 + y^2} < \frac{10}{y^2},$$

donde a nossa solução encontra-se necessariamente acima da solução de

$$y' = 0, \qquad y(1) = 1,$$

ou seja, encontra-se acima da constante 1. E encontra-se abaixo da solução de

$$y' = \frac{10}{y^2}, \qquad y(1) = 1,$$

que é uma equação separável, com solução

$$\begin{aligned} y^2 y' = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\frac{d(y(t)^3)}{dt} &= 10 \\ \Leftrightarrow \int_{t_0=1}^{t} \frac{d(y(s)^3)}{ds} ds = \int_{t_0=1}^{t} 30\, ds \Leftrightarrow y(t)^3 - 1 &= 30(t-1), \end{aligned}$$

ou seja

$$1 \leq y(t) \leq \sqrt[3]{1 + 30(t-1)},$$

para todo o $t \in [1, +\infty[$, pelo que se conclui que $y(t)$ não explode para o futuro da sua condição inicial t_0 e que o seu intervalo máximo de definição futuro é $[1, +\infty[$.