DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2023/2024

1º Teste - Versão A

19 de Outubro de 2023

Cursos: LMAC e LEFT

---

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 = x^2 + 1, \quad -2 < z < 2, \quad -1 < x < 1\}.$$

[4,0 val] (a) Prove que S é uma variedade, indique a sua dimensão e determine uma base do seu espaço tangente no ponto $(0, 1, 0)$.

[4,0 val] (b) Calcule o valor do integral $\iint_S f$ sobre S em que f é o campo escalar dado por

$$f(x, y, z) = \frac{|y|x^2z^2}{\sqrt{1 + 2x^2}}.$$

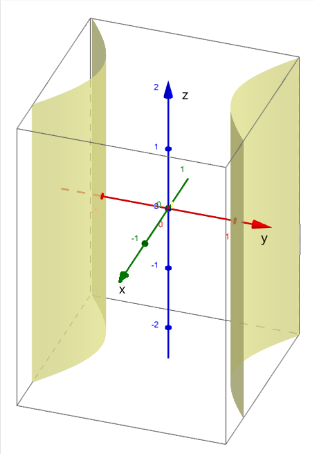
Solução:

(a) Usaremos a equação $y^2 = x^2 + 1$ para provar que S é uma variedade de dimensão 2. Assim, considerando o conjunto aberto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < x < 1, \quad y \in \mathbb{R}, \quad -2 < z < 2\}$ verificamos que S consiste exatamente dos pontos de A que satisfazem a equação, ou seja $S = \{(x, y, z) \in A : y^2 - x^2 - 1 = 0\}$. Portanto A serve de vizinhança aberta de qualquer dos pontos de S para a definição de variedade a partir da equação cartesiana/conjunto de nível, que normalmente requereria uma vizinhança para cada ponto individual. Não aqui: um só aberto A serve para todos.
Por outro lado, a função $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = y^2 - x^2 - 1$ é de classe $C^\infty(A)$ e a sua matriz jacobiana é

$$DF(x, y, z) = [-2x \quad 2y \quad 0],$$

de onde se conclui que a sua característica, nos pontos de S, é sempre 1 (basta notar que nos pontos de S se tem $y = \pm\sqrt{x^2 + 1} \neq 0$). Conclui-se, portanto, que $S = \{(x, y, z) \in A : F(x, y, z) = 0\}$ é uma variedade infinitamente diferenciável de dimensão 2.

Para obter uma base do espaço tangente recorremos agora a uma parametrização da variedade (a qual será inclusivamente útil para a alínea seguinte). É evidente que a variedade - um cilindro hiperbólico, ou seja, uma hipérbole no plano xy transladada paralelamente ao longo de $-2 < z < 2$ - consiste de duas folhas desconexas, ambos gráficos de funções em que y é dado em termos de (x, z) (na verdade, até só é dado em termos de x).



A parametrização da folha da superfície, com $y > 0$ poderá por exemplo ser $g_1(x,z) = (x, \sqrt{x^2+1}, z)$, com $-1 < x < 1$ e $-2 < z < 2$. Da mesma forma, para a folha com $y < 0$ poderemos fazer $g_2(x,z) = \left(x, -\sqrt{x^2+1}, z\right)$. A base do espaço tangente (de dimensão igual à da variedade, ou seja, 2) no ponto pedido, $(0,1,0)$, obtém-se por exemplo com as duas derivadas direcionais de g_1 em $(x,z) = (0,0)$:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0) = (1, \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, 0)_{|(x,z)=(0,0)} = (1,0,0),$$

e

$$\frac{\partial g_1}{\partial z}(0,0) = (0,0,1),$$

os quais são evidentemente linearmente independentes.

(b) Com as derivadas das parametrizações calculadas na alínea anterior, podemos rapidamente obter o elemento de área para o integral sobre S. Assim,

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} \times \frac{\partial g_1}{\partial z} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, -1, 0\right),$$

e, portanto,

$$\left\| \frac{\partial g_1}{\partial x} \times \frac{\partial g_1}{\partial z} \right\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1} + 1} = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Evidentemente para a folha com $y < 0$ parametrizada por g_2 o elemento de área é exatamente igual. Assim, pela definição de integral dum campo escalar sobre uma superfície tem-se

$$\iint_S f = \int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} f(g_1(x,z)) \left\| \frac{\partial g_1}{\partial x} \times \frac{\partial g_1}{\partial z} \right\| dxdz + \int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} f(g_2(x,z)) \left\| \frac{\partial g_2}{\partial x} \times \frac{\partial g_2}{\partial z} \right\| dxdz.$$

A função f depende de $|y|$ pelo que tem os mesmos valores nas folhas com $y > 0$ e

$y < 0$, donde estes dois últimos integrais são iguais, e podemos fazer:

$$\iint_S f = 2\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} f(g_1(x,z)) \left\| \frac{\partial g_1}{\partial x} \times \frac{\partial g_1}{\partial z} \right\| dxdz =$$

$$= 2\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} \frac{|\sqrt{x^2+1}|x^2z^2}{\sqrt{1+2x^2}} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} dxdz = 2\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} x^2z^2 dxdz =$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{64}{9}.$$

2. Considere o campo vetorial, definido em $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (z, -2x, 2x).$$

[4,0 val] (a) Justifique que $\mathbf{F}$ admite um potencial vetorial e determine um exemplo com a primeira componente nula.

[5,0 val] (b) Utilizando o teorema de Stokes, determine o fluxo de $\mathbf{F}$ através da superfície

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 25, \quad z < 4, \quad y < 4\},$$

escolhendo o sentido da normal unitária que em $(5,0,0)$ é $(1,0,0)$.

Solução:

(a) O domínio de $\mathbf{F}$ é todo o $\mathbb{R}^3$, que é evidentemente um conjunto em estrela centrado em qualquer ponto, e $\mathbf{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Por fim, tem-se

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial(z)}{\partial x} - \frac{\partial(2x)}{\partial y} + \frac{\partial(2x)}{\partial z} = 0.$$

Temos portanto garantidas as condições suficientes que garantem a existência de potencial vetorial (não único) de $\mathbf{F}$.

Procurando um tal potencial vetorial de $\mathbf{F}$ com primeira componente nula, como sugerido, queremos então $\mathbf{A} = (0, A_2, A_3)$ tal que $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{F}$, ou seja,

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, -\frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x}\right) = (z, -2x, 2x).$$

Comecemos pela última componente

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} = 2x \Rightarrow A_2(x,y,z) = x^2 + \alpha(y,z),$$

para alguma função $\alpha(y,z)$ que determinaremos no fim. A seguir primitivamos a segunda componente

$$-\frac{\partial A_3}{\partial x} = -2x \Rightarrow A_3(x,y,z) = x^2 + \beta(y,z),$$

para alguma outra função $\beta(y,z)$. Finalmente, passamos à primeira componente, que nos permite determinar α e β,

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = z \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} = z.$$

Temos agora liberdade de escolher α e β como quisermos, desde que satisfaçam esta última condição. Fazemos, para simplificar ao máximo, $\alpha = 0$ e restará assim apenas a condição

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = z,$$

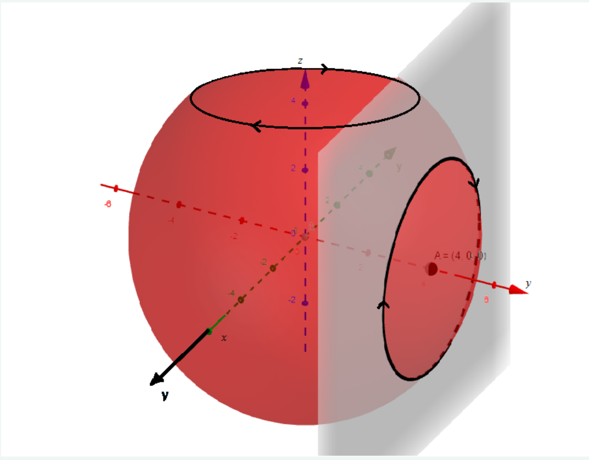
pelo que poderemos fazer simplesmente $\beta(y,z) = yz$ e assim obter um potencial vetorial

$$\mathbf{A}(x,y,z) = (0, x^2, x^2 + yz).$$

(b) Na sequência da alínea anterior, $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, pelo que o fluxo de $\mathbf{F}$ é o fluxo do rotacional de $\mathbf{A}$ e isso permite-nos usar o teorema de Stokes:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu dS = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \nu dS = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\gamma,$$

em que o integral de linha no bordo ∂S é percorrido com a orientação induzida pela normal ν. Ora S é a superfície duma esfera de raio 5 abaixo do plano $z = 4$ e à esquerda do plano $y = 4$. O bordo de S são duas circunferências, com equações $x^2 + y^2 = 9$ e $x^2 + z^2 = 9$, de centro na origem e raio 3, nos planos $z = 4$ e $y = 4$ respetivamente, onde a esfera é cortada por esses planos. E a normal unitária é a que, na interseção da esfera com o eixo dos xx (o ponto $(5,0,0)$) aponta na direção positiva do eixo, ou seja, é a normal exterior à esfera. A superfície S, com os sentidos induzidos no bordo, são os representados na figura seguinte:



Chameremos γ_1 à parametrização da circunferência no plano $z = 4$ e γ_2 à do plano $y = 4$. Tendo em conta as orientações indicadas na figura anterior, temos

$$\gamma_1(\theta) = (3\cos\theta, -3\operatorname{sen}\theta, 4)$$

e

$$\gamma_2(\theta) = (3\cos\theta, 4, 3\operatorname{sen}\theta),$$

ambos com $\theta \in [0, 2\pi]$. E assim

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu dS = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\gamma_1(\theta)) \cdot \gamma_1'(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\gamma_2(\theta)) \cdot \gamma_2'(\theta) d\theta.$$

Calculando finalmente estes dois últimos integrais de linha, com o potencial $\mathbf{A}$ determinado na alínea anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\gamma_1(\theta)) \cdot \gamma_1'(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\gamma_2(\theta)) \cdot \gamma_2'(\theta) d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} (0, 3^2\cos^2\theta, 3^2\cos^2\theta - 12\operatorname{sen}\theta) \cdot (-3\operatorname{sen}\theta, -3\cos\theta, 0) d\theta + \\
&+ \int_0^{2\pi} (0, 3^2\cos^2\theta, 3^2\cos^2\theta + 12\operatorname{sen}\theta) \cdot (-3\operatorname{sen}\theta, 0, 3\cos\theta) d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} -3^3\cos^3\theta d\theta + \int_0^{2\pi} 3^3\cos^3\theta + 36\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} 36\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta = 18\left[\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

[3,0 val] 3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado, nas condições do teorema da divergência. Sejam $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ um campo escalar, e $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ um campo vetorial que admite um potencial vetorial $\mathbf{G}$ (ou seja, tal que $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$). Assuma ainda que f se anula na fronteira de Ω, isto é, que nos pontos de $\partial\Omega$ se tem $f = 0$. Prove que, nessas condições, se tem

$$\iiint_\Omega \nabla f \cdot \mathbf{F}\, dV = 0.$$

Solução: Evidentemente, tratando-se dum integral de volume, a ideia será aplicar o teorema da divergência. E o termo $\nabla f \cdot \mathbf{F}$ sugere a fórmula da divergência do produto dum campo escalar f por um campo vetorial $\mathbf{F}$. Assim, recorde-se essa fórmula

$$\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f \operatorname{div}\mathbf{F}.$$

Mas como $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$, para algum potencial vetorial $\mathbf{G}$, temos que, necessariamente,

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{G}) = 0,$$

pelo que na fórmula anterior se terá apenas

$$\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F}.$$

Aplicando finalmente o teorema da divergência sobre o conjunto Ω e usando este último resultado, teremos então

$$\iiint_\Omega \nabla f \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_\Omega \operatorname{div}(f\mathbf{F})\, dV = \iint_{\partial\Omega} f\mathbf{F} \cdot \nu dS,$$

em que ν é a normal exterior à fronteira $\partial\Omega$. Mas a última hipótese do enunciado é que $f = 0$ nos pontos da fronteira, pelo que este integral de superfície, do fluxo de $f\mathbf{F}$ através de $\partial\Omega$, é portanto zero e isso é a conclusão pedida.