Análise Matemática I

2º Exame - 5 de Fevereiro de 99

Ele., Eng. Bio., Eng. Quí., Ges. e Quí.

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Considere $S = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \leq \frac{1}{x}\}$.

a) Represente S na recta real. (1.5)

b) Identifique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\inf S$, $\min S$, $\max S$ e $\sup S$. (1)

c) Dê um exemplo de uma sucessão de termos em S que seja

- estritamente decrescente, com limite em S; (0.5)
- estritamente decrescente, com limite no complementar de S; (0.5)
- estritamente decrescente e divergente; (0.5)
- de Cauchy; (1)
- não monótona, de Cauchy, com limite no complementar de S. (1)

2. Considere a sucessão (x_n) definida por recorrência:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_n = \frac{x_{n-1}+2}{3}. \end{cases}$$

a) Prove por indução matemática que $x_n \leq 1$. (1)

b) Prove que (x_n) é crescente. (1)

c) A sucessão (x_n) é convergente. Justifique. (1)

d) Calcule, justificando, o limite de (x_n). (1)

3. Classifique as seguintes séries quanto à convergência:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$; (1)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$; (1)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$; (1)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$. (1)

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável com $f' > 0$. Seja ainda $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = f(\arctan x^2)$.

a) Determine o domínio de diferenciabilidade de φ, calcule φ' e mostre que φ tem um mínimo absoluto em 0. (2)

b) Mostre que $\varphi''(1) + \varphi'(1) = f''(\frac{\pi}{4})$. (1.5)

5. Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua, com derivada contínua em $]0, +\infty[$, tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

a) Prove que $\exists_{c \in]0,1[}\ f'(c) = 1$. (0.5)

b) Prove que $f'(]0, +\infty[) \supset [0, 1]$. (1)

c) Prove que $\exists_{c_n \to +\infty}\ f'(c_n) \to 0$. (1)