ANÁLISE MATEMÁTICA I

(LEIC - polo da Alameda)

Resolução do exame de 17/1/2002

I.

1. Conjunto B: $\arcsin x \geq 0 \iff x \in [0,1]$. Logo, $B = [0,1]$.
   Conjunto A:
   Para $x < 0$: $\frac{x^2+x}{x-3} \leq 0 \iff \frac{x(x+1)}{x-3} \leq 0$, donde $x \leq -1$.
   Para $x > 0$: $\frac{x^2-x}{x-3} \leq 0 \iff \frac{x(x-1)}{x-3} \leq 0$, donde $x \geq 1 \wedge x < 3$.
   Para $x = 0$, $\frac{0+0}{0+3} = 0 \leq 0$ é verdadeira. Logo, $x = 0$ também satisfaz a condição que define A.
   Concluindo: $x \in A$ se e só se $x \in]-\infty,-1] \cup \{0\} \cup [1,3[$, e logo podemos identificar A com este conjunto.

2. $\inf A$ não existe (A não é minorado)
   $\max A$ não existe ($\sup A \notin A$)
   $\sup A \cap B = \sup\{0,1\} = 1$
   $\min A \cap B = \min\{0,1\} = 0$
   $\sup(B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = \sup B = 1$. Mas $1 \notin B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Logo, não existe $\max(B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$

3. a) Falsa. Um contra-exemplo: $u_n = -n$.

   b) Verdadeira. A é majorado, logo u_n é majorada. Mas u_n é crescente, logo u_n é minorada (por u_1, por exemplo). Então, u_n é limitada (simultaneamente minorada e majorada) e monótona (crescente ou decrescente). Como qualquer sucessão monótona e limitada é convergente, concluimos que u_n é convergente.

   c) Verdadeira. Como $\forall_n\ a_n \in [1,3[$, podemos concluir que ambas as subsucessões x_{2k-1} e x_{2k} são limitadas. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, cada uma tem pelo menos uma subsucessão convergente, respectivamente x'_m e x''_m, digamos. Sejam $s_1 = \lim x'_m$ e $s_2 = \lim x''_m$. Como, para todo $m \in \mathbb{N}$, $x'_m \leq -1$ e $x''_m \geq 1$, concluinos que $s_1 \leq -1 < 0$ e $s_2 \geq 1 > 0$.

   d) Falsa. Um contra-exemplo: a função $f : [1,3[\to \mathbb{R}$, definida, para todo o $x \in [1,3[$ por $f(x) = \frac{1}{3-x}$.

II.

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n}$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{\pi}$. Como $\left|\frac{1}{\pi}\right| = \frac{1}{\pi} < 1$, a série é absolutamente covergente e a sua soma é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{\pi}} = \frac{\pi}{\pi-1}.$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} = e^{\pi}$. A série é absolutamente convergente.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é a simétrica da série harmónica alternada. Logo, é simplesmente convergente.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{\pi}{n}\right)^n$: como $\left(1-\frac{\pi}{n}\right)^n \to e^{-\pi} \neq 0$, a série é divergente.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$: pelo critério de d'Alembert,

$$\frac{\frac{\pi^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{\pi^n n!}{n^n}} = \pi \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{\pi}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{\pi}{e} > 1.$$

Logo, a série é divergente.

III.

1. No primeiro limite usa-se a regra de Cauchy para a indeterminação $\frac{0}{0}$:
   $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(2x-\pi)'}{(\cos x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2}{-\sin x} = -\frac{1}{2}.$
   $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}.$
   Em ambas as derivadas usa-se a regra de derivação da função composta:
   $\displaystyle\frac{d}{dx} e^{e^x} = e^{e^x} \frac{d}{dx} e^x = e^{e^x} \cdot e^x = e^{(e^x+x)}.$
   $\displaystyle\frac{d}{dx} \arctan(\ln x) = \frac{1}{1+(\ln x)^2} \cdot \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x+x(\ln x)^2}\ .$

2. Como f e a função $\arctan x$ são duas vezes diferenciáveis, podemos aplicar duas vezes a regra de derivação da função composta:
   $\displaystyle\varphi'(x) = [f(\arctan x)]' = f'(\arctan x) \cdot (\arctan x)' = f'(\arctan x) \cdot \frac{1}{1+x^2}\ ,$
   $$\varphi''(x) = \left[f'(\arctan x) \cdot \frac{1}{1+x^2}\right]' = f''(\arctan x) \cdot (\arctan x)' \cdot \frac{1}{1+x^2} + f'(\arctan x) \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'$$
   $$= f''(\arctan x) \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2} - f'(\arctan x) \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
   $\displaystyle\varphi''(1) = f''(\frac{\pi}{4}) \cdot \frac{1}{4} - f'(\frac{\pi}{4}) \cdot \frac{2}{4}\ .$
   Daqui resulta,
   $$4\varphi''(1) = f''(\frac{\pi}{4}) - 2f'(\frac{\pi}{4}) \quad .$$

IV.

a) Cada ponto de $]-\infty, 0[$ tem uma vizinhança tal que $f(x) = x^2 e^x$, para todo x nessa vizinhança. Esta última função é o produto da função polinomial $x \mapsto x^2$ com a função exponencial $x \mapsto e^x$. Como são ambas continuas, o seu produto define uma função contínua, e portanto f é continua em $]-\infty, 0[$.

   Do mesmo modo, cada ponto de $]0, +\infty[$ possui uma vizinhança tal que $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$, para todo x nessa vizinhança. Como esta função é a composta da função $x \mapsto \frac{1}{x}$, a qual é contínua em qualquer ponto $x \neq 0$, com a função $y \mapsto \arctan y$ a qual é contínua em $\mathbb{R}$, conclui-se. pela aplicação to teorema da continuidade da função composta, que f é contínua em $]0, +\infty[$.

   Quanto ao ponto $x = 0$:
   $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0^2 e^0 = 0\,,$
   $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}\,.$
   Como os limites laterais em 0 são diferentes, concluimos que f não é contínua em 0. Concluindo: f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Quanto aos limites pedidos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{(2x)'}{(-e^{-x})'} =$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{+\infty} = 0.$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0^+} \arctan y = 0\,.$$

Nas desigualdades assinaladas com $(*)$ foi usada a regra de Cauchy para indeterminações $\frac{\infty}{\infty}$.

b) Duma forma análoga à de a), agora usando os teoremas respectivos sobre diferenciabilidade, conclui-se que a função $x \mapsto x^2e^x$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ enquanto que a função $x \mapsto \arctan\frac{1}{x}$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, e portanto f é diferenciável em $]-\infty,0[$ e $]0,+\infty[$. Como f não é contínua em $x=0$, então f não é diferenciável em $x=0$. Logo o domínio de diferenciabilidade é $D_1 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Se $x<0$: $f'(x) = (2x+x^2)e^x = x(2+x)e^x$,
se $x>0$: $f'(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2+1}$,
ou, numa forma mais conveniente, $f' : D_1 \to \mathbb{R}$ é dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} x(2+x)e^x & \text{se} \quad x<0 \\ \arctan\frac{1}{x} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

c) $x<-2 \Longrightarrow f'(x)>0$, logo f é estritamente crescente em $]-\infty,-2[$;
$-2<x<0 \Longrightarrow f'(x)<0$, logo f é estritamente decrescente em $]-2,0[$;
$x>0 \Longrightarrow f'(x)<0$, logo f é estritamente decrescente em $]0,+\infty[$;
f tem um máximo local em $x=-2$: $f(-2)=4e^{-2}$.

Além disso, no ponto $x=0$, onde f não é diferenciável (nem sequer contínua), f tem um mínimo local o qual, na realidade, é global já que f é não negativa em $\mathbb{R}$ e logo, $\forall_x f(x) \geq f(0) = 0$.

d) (Para responder a esta questão é aconselhável que recorra a um esboço do gráfico da função que integre a informação obtida nas alíneas anteriores)
Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $f(-2) = 4e^{-2}$, f é estritamente crescente em $]-\infty,-2[$ e é contínua em $]-\infty,-2]$, usando o teorema do valor intermédio (ou de Bolzano), concluimos que $f(]-\infty,-2]) =]0,4e^{-2}]$.
Como $f(-2)=4e^{-2}$, $f(0)=0$, f é estritamente decrescente em $]-2,0[$ e f restrita a $[-2,0]$ é contínua, novamente pelo teorema do valor intermédio concluimos que $f([-2,0]) = [0,4e^{-2}]$.
Como $\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, f é estritamente decrescente em $]0,+\infty[$ e é contínua nesse intervalo, podemos concluir, novamente por recurso ao teorema do valor intermédio, que $f(]0,+\infty[) =]0,\frac{\pi}{2}[$.
Logo, dado que $4e^{-2} < 1 < \frac{\pi}{2}$, o contradomínio de f é

$$f(\mathbb{R}) =]0,4e^{-2}] \cup [0,4e^{-2}] \cup]0,\frac{\pi}{2}[= [0,\frac{\pi}{2}[\,.$$

V.

a) Em primeiro lugar, note-se que a hipótese implica $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Logo,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}.$$

Usando novamente a hipótese, obtemos, para todo $x \in [-1,1]$:

$$0 \leq \frac{|f(x)|}{|x|} \leq |x(1-x^2)|$$

Como $\lim_{x\to 0}|x(1-x^2)| = 0$, concluimos que $\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| = 0$, o que equivale a $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$ e, portanto, pela definição de derivada, f é diferenciável em 0, com

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0.$$

b) Em prineiro lugar, note-se que, por hipótese, f é três vezes diferenciável em $]-1,1[$, e portanto, f, f' e f'' são diferenciáveis. Em particular, isto implica que f' e f'' são contínuas em $]-1,1[$.

Dado que f é contínua em $[-1,1]$ e diferenciável em $]-1,1[$, como $f(-1)=f(0)=f(1)$, o teorema de Rolle aplicado aos intervalos $[-1,0]$ e $[0,1]$, assegura que existem $k_1 \in]-1,0[$ e $k_2 \in]0,1[$ tais que $f'(k_1)=f'(k_2)=0$. Como f' é contínua em $[k_1,0]$ e $[0,k_2]$, diferenciável em $]k_1,0[$ e $]0,k_2[$, e, além disso, de acordo com a alínea a), $f'(k_1)=f'(0)=f'(k_2)$, novamente pelo teorema de Rolle, neste caso aplicado a f', concluimos que existem $c_1 \in]k_1,0[$ e $c_2 \in]0,k_2[$ tais que $f''(c_1)=f''(c_2)=0$. Por fim, f'' é contínua em $[c_1,c_2]$, diferenciável em $]c_1,c_2[$ e $f''(c_1)=f''(c_2)$. Logo, pelo teorema de Rolle aplicado a f'' no intervalo $[c_1,c_2]$, concluimos que existe $c \in]c_1,c_2[\subset]-1,1[$, tal que $f'''(c)=0$.