CDI-I

3^a Ficha-8^a Aula Prática (1^a parte)

I. Representação gráfica de funções.

1)

(a) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$.

Domínio de f :
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pontos de intersecção do gráfico de f **com os eixos coordenados:**
$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x + \frac{1}{x^2} = 0 \underset{\times\, x^2}{\Longleftrightarrow} x^3 + 1 = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x^3 = -1 \Longleftrightarrow x = -1$.
Logo, o gráfico de f intersecta o eixo das abcissas no ponto $(-1, 0)$.
Visto que $0 \notin D_f$, conclui-se que o gráfico de f não intersecta o eixo das ordenadas.

Limites no infinito:
$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$.

Assímptotas verticais de f :
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty,$

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$

Logo,
A recta de equação $x = 0$ é uma assímptota vertical (aliás é a única assímptota vertical) de f, tendo-se:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Assímptotas não-verticais de f :

Se existirem, as assímptotas não-verticais admitem uma equação da forma $y = mx + b$, sendo:

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(f\left(x\right) - mx\right) \end{cases} \vee \begin{cases} m = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \left(f\left(x\right) - mx\right) \end{cases} .$$

Ora,

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = 1 = m,$

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(f\left(x\right) - mx\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(f\left(x\right) - x\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(x + \frac{1}{x^2} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = b.$

Logo, f tem uma assímptota não-vertical, quando $x \longrightarrow +\infty$, de equação:

$$y = x \ .$$

$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = 1 = m,$

$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \left(f\left(x\right) - mx\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \left(f\left(x\right) - x\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \left(x + \frac{1}{x^2} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = b.$

Logo, f tem uma assímptota não-vertical, quando $x \longrightarrow -\infty$, de equação:

$$y = x \ .$$

Note-se, ainda que

$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \left(f\left(x\right) - x\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(f\left(x\right) - x\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$.

Intervalos de monotonia, extremos e pontos de inflexão:

Ora,

$f'\left(x\right) = \left(x + \frac{1}{x^2}\right)' = 1 + \frac{-2x}{x^4} = 1 - \frac{2}{x^3}.$

$f''\left(x\right) = \left(1 - \frac{2}{x^3}\right)' = -2.\frac{-3x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}$.

Zeros e sinal de f' :

$f'\left(x\right) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \frac{2}{x^3} = 0 \Longleftrightarrow \frac{2}{x^3} = 1 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^3 = 2 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \approx 1,\ 259\,9$.

$x \in \left]0, +\infty\right[\Longrightarrow f'\left(x\right) < 0 \Longleftrightarrow 1 - \frac{2}{x^3} < 0 \Longleftrightarrow \frac{2}{x^3} > 1 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 2 > x^3 \underset{x\in\left]0,+\infty\right[}{\Longleftrightarrow} 0 < x < \sqrt[3]{2}$.

$x \in \left]0, +\infty\right[\Longrightarrow f'\left(x\right) > 0 \Longleftrightarrow 1 - \frac{2}{x^3} > 0 \Longleftrightarrow \frac{2}{x^3} < 1 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 2 < x^3 \Longleftrightarrow x > \sqrt[3]{2}$.

$x \in \left]-\infty, 0\right[\Longrightarrow f'\left(x\right) = 1 - \frac{2}{x^3} > 0$.

Temos, assim, a seguinte tabela:

		0		$\sqrt[3]{2}$	
$f'(x)$	$+$	não definida	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	não definida	$\searrow$	$\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \approx 1,8899$ (mínimo local)	$\nearrow$

.

Relembre-se que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty \ , \\
\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \ , \\
\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \ .
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0$ (para $x \neq 0$) .

Logo, o gráfico de f não tem pontos de inflexão (f'' nunca se anula) e a sua concavidade está sempre virada para cima (f'' é sempre > 0).

Temos, assim, a seguinte tabela:

		0	
$f''(x)$	$+$	não definida	$+$
$f(x)$	$\cup$	não definida	$\cup$

.

Gráfico de f: