Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TODOS OS CURSOS EXECEPTO LEAMB, LEMAT, LQ, MEBIOL, MEQ,
TESTE 2 – 15 DE DEZEMBRO DE 2007,
DURAÇÃO: 90 MINUTOS

Resolução abreviada

(3 val.) 1. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y<1\,;\, 0<z<1+x+y\,;\, x>0\,;\, y>0\}.$$

Calcule o volume de V usando um integral iterado da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

Resolução:

$$\text{vol}_3(V) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1+x+y} dz\right)dy\right)dx = \frac{5}{6}.$$

(3 val.) 2. Use a mudança de variáveis $u = x+y\,;\, v = y - x^3$ para calcular a massa do conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x+y < 2\,;\, 0 < y - x^3 < 1\},$$

cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y) = 1+3x^2$.

Resolução: Sendo o Jacobiano da mudança de variáveis $(x,y) \mapsto (u,v)$ dado por $1+3x^2$, o Jacobiano da mudança $(u,v) \mapsto (x,y)$ será dado por $\dfrac{1}{1+3x^2(u,v)}$ e, portanto,

$$M = \int_D \sigma = \int_1^2 \left(\int_0^1 dv\right)du = 1.$$

(3 val.) 3. Calcule a área da superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2\,;\, x>0\,;\, y>0\,;\, z<1\}$.

Resolução: Considere-se a parametrização

$$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta, \rho^2)\,; \quad 0<\rho<1\,;\, 0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

Sendo

$$D_\rho g(\rho,\theta) = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 2\rho)$$
$$D_\theta g(\rho,\theta) = (-\rho\,\text{sen}\,\theta, \rho\cos\theta, 0),$$

temos

$$\|D_\rho g \times D_\theta g\| = \rho\sqrt{4\rho^2+1}$$

e, portanto,

$$\text{vol}_2(S) = \int_0^1\int_0^{\pi/2} \rho\sqrt{4\rho^2+1}\,d\theta d\rho = \frac{\pi}{24}\left(5^{3/2}-1\right).$$

4. Considere o campo $F(x,y,z) = (e^{xy}\cos z, x^2 z, xy)$ e as superfícies

$$\begin{aligned} M =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x > 0\} \\ N =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\,;\ y^2+z^2 < 1\}, \end{aligned}$$

orientadas com normais com primeira componente positiva.

a) Calcule o fluxo do rotacional de F através de N, usando o teorema de Stokes. (3 val.)

Resolução: Sendo $\nu = (1,0,0)$ a normal em N, o fluxo do rotacional de F em N será dado pela circulação de F no bordo de N no sentido dado pelo caminho

$$\gamma(T) = (0, \cos t, \operatorname{sen} t)\,; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

e, portanto,

$$\iint_N \text{rot}F\cdot\nu = \oint_{\partial N} F\cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (\cos(\operatorname{sen} t), 0, 0)\cdot(0, -\operatorname{sen} t, \cos t)dt = 0.$$

b) Mostre que o fluxo do rotacional de F em M é igual ao fluxo do rotacional de F em N. (1 val.)

Resolução: Sendo o bordo de M o mesmo que o bordo de N, temos

$$\iint_M \text{rot}F\cdot\nu = \oint_{\partial M} F\cdot d\gamma = \oint_{\partial N} F\cdot d\gamma = \iint_N \text{rot}F\cdot\nu.$$

5. Considere a superfície $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2+y^2+z^2 = 1\,;\ z > 0\}$ e o campo vectorial (3 val.)

$$F(x,y,z) = \left(z^2x\,,\, \frac{1}{3}y^3 - \tan(z)\,,\, x^2z + 3\right).$$

Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de M segundo a normal com terceira componente positiva.

Resolução: Considerem-se os conjuntos

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\,;\ z > 0\}$$

e

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1\,;\ z = 0\}.$$

Dado que div$F = x^2+y^2+z^2$ e $F\cdot\nu = -3$, em B, pelo teorema da divergência, temos

$$\begin{aligned} \iint_M F\cdot\nu &= \iiint_V \text{div}F - \iint_B F\cdot\nu \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^4 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\phi\, d\theta + 3\pi = \frac{17\pi}{5} \end{aligned}$$

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Mostre que o trabalho de $F = (\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x})$ ao longo da circunferência centrada na origem e de raio igual a um é nulo. (1 val.)

Resolução: Aplicando o teorema de Green ao campo F no círculo de raio igual a um e centro na origem, obtemos

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dxdy = 0,$$

em que D é o círculo e C a respectiva fronteira.

(3 val.) 7. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua, $B_\rho = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ ||(x, y)|| \leq \rho\right\}$ com $0 < \rho \leq 1$, e considere a função

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho} u.$$

Mostre que

$$\lim_{\rho \to 0} I(\rho) = 2\pi u(0, 0).$$

Resolução: Dado que ∂B_ρ é a circunferência de raio ρ e centrada na origem, temos

$$I(\rho) = \int_0^{2\pi} u(\rho \cos t, \rho \operatorname{sen} t) dt.$$

Sabendo que u é uma função contínua, existem $\overline{t} \in [0, 2\pi]$ e $\underline{t} \in [0, 2\pi]$ tais

$$u(\rho \cos \underline{t}, \rho \operatorname{sen} \underline{t}) = \min_{0 \leq t \leq 2\pi} u(\rho \cos t, \rho \operatorname{sen} t)$$
$$u(\rho \cos \overline{t}, \rho \operatorname{sen} \overline{t}) = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} u(\rho \cos t, \rho \operatorname{sen} t)$$

e, portanto,

$$2\pi u(\rho \cos \underline{t}, \rho \operatorname{sen} \underline{t}) \leq I(\rho) \leq 2\pi u(\rho \cos \overline{t}, \rho \operatorname{sen} \overline{t}),$$

ou seja,

$$\lim_{\rho \to 0} I(\rho) = 2\pi u(0, 0).$$