Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 12 de Junho de 2017 - 9h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC, MEBiom e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

Resolução

1. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 = 3, x + 2y + z = 4\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que A é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

Resolução:

Seja $F(x, y, z) = (2x^2 + y^2 - 3, x + 2y + z - 4 = 0)$. A é o conjunto de nível de F correspondente ao valor 0. Temos,

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 4x & 2y & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz só não tem caracterísitica máxima (igual a 2) se $x = y = 0$, mas tais pontos não pertencem a A. Logo, A é uma variedade-1.

(1 val.) (b) Determine um vector não nulo tangente a A no ponto $(1, 1, 1)$.

Resolução:

Temos

$$DF(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, o vector $(1, -2, 3)$ é perpendicular às duas linhas da matriz e é portanto tangente a A em $(1, 1, 1)$.

(2 val.) (c) Mostre que, numa vizinhança aberta de $(1, 1, 1)$, A pode ser descrito pelo gráfico de uma função de classe C^1, na forma $(x, z) = g(y)$. Determine $g'(1)$.

Resolução:

Temos

$$\det \frac{\partial F}{\partial(x, z)}(1, 1, 1) = \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 4 \neq 0.$$

Pelo teorema da função implícita, concluímos que localmente A é um gráfico da forma $(g_1(y), y, g_2(y))$ onde $g = (g_1, g_2)$ é uma função de classe C^1 definida numa vizinhança aberta de 1. Temos ainda nessa vizinhança

$$\frac{d}{dy} F(g_1(y), y, g_2(y)) = 0,$$

pelo que $\nabla g(1) = (-1/2, -3/2)$.

(2 val.) (d) Determine os pontos de A onde a função $h(x,y,z) = 4x + 2y$ atinge os valores máximo e mínimo.

Resolução:

Usando multiplicadores de Lagrange, teremos que nesses pontos

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3 &= 0, \\ x + 2y + z - 4 &= 0, \\ (4,2,0) &= \lambda_1(4x, 2y, 0) + \lambda_2(1,2,1). \end{cases}$$

As soluções são $a = (1,1,1)$ e $b = (-1,-1,7)$. A é obtida pela intersecção de um elipsóide com um plano e é compacta; como $h(1,1,1) = 6 > h(-1,-1,7) = -6$ concluímos que a é o ponto de máximo e b o ponto de mínimo.

(3 val.) 2. Considere o campo vectorial

$$G(x,y) = \left(\frac{4x^3}{x^4+y^2} + y, \frac{2y}{x^4+y^2} + x\right).$$

Calcule o trabalho de G ao longo do caminho $\alpha(t) = (t^2, 1+t), t \in [0,1]$.

Resolução:

Temos $g = \nabla\phi$, onde $\phi(x,y) = \log(x^4+y^2)+xy$ é de classe C^1 no domínio de G. Logo,

$$\int G \cdot d\alpha = \phi(\alpha(1)) - \phi(\alpha(0)) = \log(5) + 2 - \log(1) - 0 = \log(5) + 2.$$

3. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1 - \sqrt{x^2+z^2}, 0 < y < 1\}.$$

(1 val.) (a) Calcule a área de S.

Resolução:

Uma parametrização para a superfície S é dada por $g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, 1-\rho, \rho\operatorname{sen}\theta)$ com $0 < \rho < 1$ e $0 < \theta < 2\pi$, logo a área é dada por

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{\det Dg^(t)(\rho,\theta) Dg(\rho,\theta)}\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\rho\, d\rho\, d\theta = \sqrt{2}\pi.$$

(3 val.) (b) Calcule o fluxo do campo $F(x,y,z) = (2e^y xz, x^2+z^2, 3-z^2e^y)$ através de S no sentido da normal unitária cuja segunda componente é positiva.

Resolução:

Usando o Teorema da Divergência com

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \leq 1 - \sqrt{x^2+z^2}, 0 < y < 1\}$$

temos

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} F \cdot n_e$$

onde n_e denota a normal exterior a ∂D. Como $\operatorname{div} F = 0$ e $\partial D = S \cup T$, onde $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \leq 1, y = 0\}$, obtemos

$$\int_S F \cdot n_e = -\int_T F \cdot n_T = \int_T x^2 + z^2 \, dx\, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2},$$

pois $n_T = (0,-1,0)$. Finalmente, como a normal unitária cuja segunda componente é positiva é a normal exterior, concluímos que o resultado final é $\dfrac{\pi}{2}$.

(3 val.) 4. Utilizando o Teorema de Stokes, calcule o trabalho do campo

$$H(x,y,z) = (\operatorname{sen} z + e^{x+z}, xz + y^3, e^y \cos x)$$

ao longo da circunferência C dada pelas equações $x^2+y^2 = 4$ e $z = -1$, percorrida no sentido anti-horário quando vista por um observador colocado no ponto $(0,0,10)$.

Resolução:

Considerando a superfície S dada por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4, z = -1\}$$

temos $\partial S = C$. Usando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\int_C H \cdot dg = \int_S \operatorname{rot} H \cdot n = \int_S z = -\text{área}(S) = -4\pi,$$

pois $\operatorname{rot} H = (\,\cdot\,, \,\cdot\,, z)$, a normal unitária compatível com o sentido de C é $n = (0,0,1)$ e $z = -1$ em S.

(3 val.) 5. Sejam M e N variedades-2 compactas em $\mathbb{R}^3$ que não se intersectam. Mostre que se $p \in M, q \in N$ são pontos onde a distância entre M e N é mínima, então

$$(T_pM)^\perp = (T_qN)^\perp.$$

Resolução:

Seja $p = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. O quadrado da distância a p é a função dada por $d_p^2(x,y,z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ cujo gradiente é $2(x-a, y-b, z-c) = 2(x,y,z) - 2p$. Do mesmo modo, se $q = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, o quadrado da distância a q é a função dada por $d_q^2(a,b,c) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ cujo gradiente é $-2(x-a, y-b, z-c) = 2(a,b,c) - 2q$.

Suponhamos agora que $p \in M, q \in N$ são pontos onde a distância entre M e N é mínima. Como sabemos do estudo dos extremos condicionados, temos de ter então, respectivamente,

$$\nabla d_p^2(q) \in (T_qN)^\perp, \;\; \nabla d_q^2(p) \in (T_pM)^\perp.$$

Logo,

$$0 \neq p - q \in (T_pM)^\perp \cap (T_qN)^\perp,$$

e como ambos os espaços normais têm dimensão 1, isso implica que $(T_pM)^\perp = (T_qN)^\perp$.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 12 de Junho de 2017 - 9h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC, MEBiom e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 = 3, x + 2y + 2z = 5\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que B é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(1 val.) (b) Determine um vector não nulo tangente a B no ponto $(1,1,1)$.

(2 val.) (c) Mostre que, numa vizinhança aberta de $(1,1,1)$, B pode ser descrito pelo gráfico de uma função de classe C^1, na forma $(y,z) = h(x)$. Determine $h'(1)$.

(2 val.) (d) Determine os pontos de B onde a função $g(x,y,z) = 2x + 4y$ atinge os valores máximo e mínimo.

(3 val.) 2. Considere o campo vectorial

$$F(x,y) = \left(\frac{4x}{2x^2 + y^4} + y, \frac{4y^3}{2x^2 + y^4} + x \right).$$

Calcule o trabalho de F ao longo do caminho $\beta(t) = (t, 1 + t^2), t \in [0,1]$.

3. Considere a superfície

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 1 = \sqrt{y^2 + z^2}, -1 < x < 0\}.$$

(1 val.) (a) Calcule a área de A.

(3 val.) (b) Calcule o fluxo do campo $H(x,y,z) = (y^2 + z^2, 2e^x yz, 5 - z^2 e^x)$ através de A no sentido da normal unitária cuja primeira componente é negativa.

(3 val.) 4. Utilizando o Teorema de Stokes, calcule o trabalho do campo

$$G(x,y,z) = (\operatorname{sen} z - yz, e^{y+z} + y^3, e^z \operatorname{sen} x)$$

ao longo da circunferência C dada pelas equações $x^2 + y^2 = 3$ e $z = 1$, percorrida no sentido horário quando vista por um observador colocado no ponto $(0,0,20)$.

(3 val.) 5. Sejam M e N variedades-2 compactas em $\mathbb{R}^3$ que não se intersectam. Mostre que se $p \in M, q \in N$ são pontos onde a distância entre M e N é mínima, então

$$(T_p M)^\perp = (T_q N)^\perp.$$

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 12 de Junho de 2017 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC, MEBiom e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

Resolução

1. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que A é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

Resolução:

Seja $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 9$. A é o conjunto de nível de F correspondente ao valor 0. Ora,

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x & 4y & 2z \end{bmatrix},$$

só não tem característica máxima (igual a 1) no ponto $(0, 0, 0)$ que não pertence a A. Logo, A é variedade-2.

(1 val.) (b) Determine os pontos de A em que o vector $(3, 2, 2)$ é normal a A.

Resolução:

Procuramos $(x, y, z) \in A$ tal que, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(3, 2, 2) = \lambda \nabla F(3, 2, 2) = \lambda(6x, 4y, 2z).$$

Pondo, $x = 1/(2\lambda) = y, z = 1/\lambda$ obtemos, substituindo em $F(x, y, z) = 0$, $\lambda = \pm 1/2$. Assim, temos os pontos $(1, 1, 2)$ e (-1,-1,-2).

(2 val.) (c) Mostre que, numa vizinhança aberta de $(0, 2, 1)$, A pode ser descrito pelo gráfico de uma função de classe C^1, na forma $z = g(x, y)$. Determine $\nabla g(0, 2)$.

Resolução:

Temos

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0, 2, 1) = 2 \neq 0.$$

Pelo teorema da função implícita, existe uma função de classe C^1 definida numa vizinhança aberta de $(0, 2)$, $z = g(x, y)$, tal que

$$F(x, y, g(x, y)) = 0,$$

nessa vizinhança. Logo,

$$DF(0,2,1) \cdot Dg(0,2) = 0,$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,2) & \frac{\partial g}{\partial y}(0,2) \end{bmatrix} = 0,$$

o que fornece $\nabla g(0,2) = (0,-4)$.

(2 val.) (d) Determine os pontos de A onde a função $h(x,y,z) = 2y + z$ atinge os valores máximo e mínimo.

Resolução:

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, procuramos pontos tais que

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + z^2 &= 9, \\ (0,2,1) &= \lambda(6x, 4y, 2z) \end{cases}$$

Obtemos $x = 0, y = z = 1/(2\lambda)$, o que fornece os pontos $(0, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ e $(0, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. O primeiro é o máximo e o segundo o mínimo. Note-se que A é um elipsóide e é compacta.

(3 val.) 2. Considere o campo vectorial

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} - 3y, \frac{2y}{x^2+y^2} + 3x \right).$$

Seja E a elipse definida pela equação $2x^2 + 3y^2 = 1$. Calcule o trabalho de F ao longo de E percorrida no sentido anti-horário.

Resolução:

Seja $F = G + H$ onde

$$G(x,y) = (-3y, 3x),\ H(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2} \right).$$

Temos que $H = \nabla\left(\log(x^2+y^2)\right)$. Logo o trabalho de H ao longo da elipse é nulo. Por outro lado

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = 6,$$

e sendo G de classe C^1 (em $\mathbb{R}^2$), aplicando o teorema de Green, sendo U a área limitada por E,

$$\oint_E G = \int\int_U \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) dxdy = 6 \times \text{área}(U) = \sqrt{6}\pi.$$

Logo, $\oint_E H = \sqrt{6}\pi + 0 = \sqrt{6}\pi$.

(1 val.) 3. Calcule a massa total do fio

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, x + y = 3\}$$

com densidade de massa por unidade de comprimento dada por $\sigma(x, y, z) = \dfrac{3}{\sqrt{1 + z^2}}$.

Resolução:

Considere a parametrização de L dada por $g(t) = (\cos t, 3 - \cos t, \operatorname{sen} t)$ com $0 < t < 2\pi$. A massa total do fio é dada por

$$\mathcal{M} = \int_L \sigma = \int_0^{2\pi} \sigma(g(t)) \parallel g'(t) \parallel dt = \int_0^{2\pi} \frac{3}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt = 6\pi.$$

4. Considere a superfície

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 1 = y^2 + z^2, 0 < x < 1\}.$$

orientada com a normal unitária n cuja primeira componente é negativa. Seja $G(x, y, z) = (2x, -y, 1 - z)$. Calcule o fluxo $\int_B G \cdot n$, usando:

(3 val.) (a) o Teorema da Divergência;

Resolução:

A superfície B é um hiperbolóide. Para usar o Teorema da Divergência devemos considerar o conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 1 \geq y^2 + z^2, 0 < x < 1\}.$$

Como $\operatorname{div} F = 0$ e $\partial D = B \cup T_0 \cup T_1$ onde

$$T_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : k + 1 \geq y^2 + z^2, x = k\} \quad \text{com} \quad k = 0, 1$$

obtemos

$$0 = \int_D \operatorname{div} G = \int_{\partial D} G \cdot n = \int_B G \cdot n_e + \int_{T_0} G \cdot n_0 + \int_{T_1} G \cdot n_1.$$

As normais unitárias a T_0 e T_1 são dadas por $n_0 = (-1, 0, 0)$ e $n_1 = (1, 0, 0)$, logo $G \cdot n_{0|T_0} = -2x_{|T_0} = 0$ e $G \cdot n_{1|T_1} = 2x_{|T_1} = 2$, portanto

$$\int_B G \cdot n_e = -2\text{área}(T_1) = -4\pi.$$

(3 val.) (b) o Teorema de Stokes.

Resolução:

Uma vez que o domínio de G é $\mathbb{R}^3$ que é um conjunto em estrela e $\operatorname{div} G = 0$ podemos concluir que existe um campo vectorial $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $G = \operatorname{rot} A$. O campo A satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_3}{\partial y} - \dfrac{\partial A_2}{\partial z} = 2x \\[2ex] \dfrac{\partial A_1}{\partial z} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x} = -y \\[2ex] \dfrac{\partial A_2}{\partial x} - \dfrac{\partial A_1}{\partial y} = 1 - z \end{cases}$$

Escolhendo $A_2 = 0$ obtemos, por exemplo, a solução $A = (zy - y, 0, 2xy)$. Uma vez que $\partial B = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ onde

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : k + 1 = y^2 + z^2, x = k\} \quad \text{com} \quad k = 0, 1,$$

temos, usando o Teorema de Stokes,

$$\int_B G \cdot n = \int_B \operatorname{rot} A \cdot n = \int_{\partial B} G \cdot dg = \int_{\Gamma_0} G \cdot dg_0 + \int_{\Gamma_1} G \cdot dg_1.$$

A regra da mão direita diz-nos que a circunferência Γ_0 deve ser percorrida no sentido anti-horário e a circunferência Γ_1 no sentido horário quando vistas do ponto $(100, 0, 0)$. Usando as parametrizações $g_0(t) = (0, \cos t, \operatorname{sen} t)$ e $g_1(t) = (1, \sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\operatorname{sen} t)$, $0 < t < 2\pi$, para Γ_0 e Γ_1, respectivamente, obtemos, finalmente

$$\int_B G \cdot n = \int_{\Gamma_0} G \cdot dg_0 + \int_{\Gamma_1} G \cdot dg_1 = 0 + \int_0^{2\pi} A(g_1(t)) g_1'(t)\, dt = -4\pi.$$

(3 val.) 5. Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ e $L \subset \mathbb{R}^n$ variedades de dimensão $\dim K = k$, $\dim L = l$, tal que $k + l > n$. Mostre que se

$$(T_pK)^\perp \cap (T_pL)^\perp = \{0\}, \quad \forall p \in K \cap L,$$

então $K \cap L$ é uma variedade e determine a sua dimensão.

Resolução:

Seja $p \in K \cap L$. Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $p \in U \cap V$, tal que localmente K e L são dadas por conjuntos de nível de funções de classe C^1, respectivamente, $F_K : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ e $F_L : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-l}$ sendo que,

$$\{\nabla F_{K_1}, \ldots, \nabla F_{K_{n-k}}\}$$

é base de $(T_pK)^\perp$ e que

$$\{\nabla F_{L_1}, \ldots, \nabla F_{L_{n-l}}\}$$

é base de $(T_pL)^\perp$. Então, $K \cap L \cap U \cap V$ será um conjunto de nível de $F : U \cap V \to \mathbb{R}^{n-(k+l-n)}$ com $F = (F_K, F_L)$. Por hipótese, a característica de DF é máxima e igual a $n - (k + l - n)$ numa vizinhança aberta de p. Logo, $K \cap L$ é uma variedade de dimensão $k + l - n$.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 12 de Junho de 2017 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC, MEBiom e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 10\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que B é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(1 val.) (b) Determine os pontos de B em que o vector $(1, 1, 2)$ é normal a B.

(2 val.) (c) Mostre que, numa vizinhança aberta de $(3, 0, \frac{1}{2})$, B pode ser descrito pelo gráfico de uma função de classe C^1, na forma $x = h(y, z)$. Determine $\nabla h(0, \frac{1}{2})$.

(2 val.) (d) Determine os pontos de B onde a função $g(x, y, z) = 2x + 8z$ atinge os valores máximo e mínimo.

(3 val.) 2. Considere o campo vectorial

$$G(x, y) = \left(\frac{3y}{x^2 + y^2} - 2y, \frac{-3x}{x^2 + y^2} + 2x \right).$$

Seja E a elipse definida pela equação $3x^2 + 2y^2 = 1$. Calcule o trabalho de G ao longo de E percorrida no sentido anti-horário.

(1 val.) 3. Calcule a massa total do fio

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1, z + x = 2\}$$

com densidade de massa por unidade de comprimento dada por $\sigma(x, y, z) = \dfrac{2}{\sqrt{1 + y^2}}$.

4. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + 1 = x^2 + z^2, -1 < y < 0\}.$$

orientada com a normal unitária n cuja segunda componente é positiva. Seja $F(x, y, z) = (x, -2y, z - 1)$. Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$, usando:

(3 val.) (a) o Teorema da Divergência;

(3 val.) (b) o Teorema de Stokes.

(3 val.) 5. Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ e $L \subset \mathbb{R}^n$ variedades de dimensão $\dim K = k$, $\dim L = l$, tal que $k + l > n$. Mostre que se

$$(T_p K)^\perp \cap (T_p L)^\perp = \{0\}, \quad \forall p \in K \cap L,$$

então $K \cap L$ é uma variedade e determine a sua dimensão.