Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 11 de Junho de 2018 - 9h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1, z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2\}$$

(2val.) (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

(1.5val.) (b) Determine o espaço tangente a M no ponto $(0,-1,1)$.

(1.5val.) (c) Mostre que a equação $z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2$ define uma função $z(x,y)$ de classe C^1 num aberto em torno de cada ponto de M.

2. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = z^2, 0 < z < 1\}$$

e o campo vetorial $H \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$H(x,y,z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, z(1-z)\right)$$

(2val.) (a) Calcule a área de S.

(3val.) (b) Calcule o fluxo de H através de S no sentido da normal unitária com componente z negativa.

(2val.) (c) Determine se H é conservativo e, em caso afirmativo, calcule um potencial para H.

(2val.) (d) Calcule o trabalho de H ao longo da curva definida pela intersecção de S com o plano definido por $x + 2y = 2$ do ponto $(0,1,\frac{1}{2})$ ao ponto $(2,0,1)$.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z\sqrt{x^2+y^2} = 1, x > 0, 1 < z < 2\}$$

e o campo vetorial $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido pela expressão

$$F(x,y,z) = (yz, -xz + x^2y, 0)$$

(2.5val.) (a) Calcule o fluxo de $\operatorname{rot} F$ através de S no sentido da normal unitária com terceira componente negativa.

(0.5val.) (b) Dê um exemplo de um campo vetorial de classe C^1, não nulo, $G \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que o trabalho realizado por G ao longo do bordo de S seja nulo.

(3val.) 4. Mostre que a equação $z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2$ define uma função $z(x,y)$ de classe C^1 num aberto que contém a circunferência $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ e calcule o máximo dessa função sobre a circunferência.

Sugestão: Use a alínea 1(c) e note que, para cada (x,y), a função $g_{x,y}(z) = z^5 + 2x^2z^3 + y^2z$ é crescente.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 11 de Junho de 2018 - 9h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 = 1, y^5 + z^2y^3 + 2x^2y = 3\}$$

(2val.) (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

(1.5val.) (b) Determine o espaço tangente a M no ponto $(1, 1, 0)$.

(1.5val.) (c) Mostre que a equação $y^5 + z^2y^3 + 2x^2y = 3$ define uma função $y(x, z)$ de classe C^1 num aberto em torno de cada ponto de M.

2. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = z^2, -1 < z < 0\}$$

e o campo vetorial $H \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$H(x, y, z) = (x, y, z(1 + z))$$

(2val.) (a) Calcule a área de S.

(3val.) (b) Calcule o fluxo de H através de S no sentido da normal unitária com componente z positiva.

(2val.) (c) Determine se H é conservativo e, em caso afirmativo, calcule um potencial para H.

(2val.) (d) Calcule o trabalho de H ao longo da curva definida pela intersecção de S com o plano $3x + y = 3$ do ponto $(1, 0, -\frac{1}{3})$ ao ponto $(0, 3, -1)$.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x\sqrt{y^2 + z^2} = 1, z > 0, 1 < x < 3\}$$

e o campo vetorial $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido pela expressão

$$F(x, y, z) = (0, xz + yz^2, -xy)$$

(2.5val.) (a) Calcule o fluxo de $\operatorname{rot} F$ através de S no sentido da normal unitária com primeira componente positiva.

(0.5val.) (b) Dê um exemplo de um campo vetorial de classe C^1, não nulo, $G \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que o trabalho realizado por G ao longo do bordo de S seja nulo.

(3val.) 4. Mostre que a equação $y^5 + z^2y^3 + 2x^2y = 3$ define uma função $y(x, z)$ de classe C^1 num aberto que contém a circunferência $\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + z^2 = 1\}$ e calcule o mínimo dessa função sobre a circunferência.

Sugestão: Use a alínea 1(c) e note que, para cada (x, z), a função $g_{x,z}(y) = y^5 + z^2y^3 + 2x^2y$ é crescente.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 11 de Junho de 2018 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$(u,v) = f(x,y) = (x^2 + y, x + y^2)$$

(2val.) (a) Mostre que f é localmente invertível em torno do ponto $(x,y) = (1,2)$ e calcule $\frac{\partial y}{\partial u}(3,5)$.

(0,5val.) (b) A função f é invertível? Justifique.

2. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z - x + y^2 = 0, 0 < x < 1, 0 < y < x\}$$

(2val.) (a) Mostre que S é uma variedade e indique a sua dimensão.

(2val.) (b) Calcule o integral em S do campo escalar $\sqrt{1+2x-2z}$, $\int_S \sqrt{1+2x-2z}$

3. Seja $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por $F(x,y) = (x^2, y^3 + y)$ e considere a curva C parametrizada por

$$g(t) = (2\cos^3 t, 2\operatorname{sen}^3 t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(2val.) (a) Determine o trabalho realizado por F ao longo da curva C.

(2val.) (b) Sendo $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por $G(x,y) = F(x,y) + (-2y, 2x)$ calcule o trabalho realizado por $G(x,y)$ ao longo da curva C.

(1val.) (c) Usando o Teorema de Green calcule a área da região do plano limitada pela curva C.

(3val.) 4. Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x,y,z) = (x, -y, y)$ através da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y^2 + z^2 = 2 + x^2, -1 < x < 2\}$$

no sentido da normal unitária n que toma o valor $(0,1,0)$ no ponto $(0, \sqrt{2}, 0)$.

(3val.) 5. Utilizando o Teorema de Stokes, calcule o trabalho do campo vetorial $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$G(x,y,z) = (x^2 y, 1, z)$$

ao longo da curva C definida pelas equações $x^2 + y^2 = 7$ e $z = x$, percorrida no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0,0,10)$.

(2,5val.) 6. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 tal que $\operatorname{div} F = 0$ e $\int_S F \cdot n \neq 0$ onde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$ (e n é uma normal unitária qualquer). Mostre que o campo escalar definido pelo comprimento de F, isto é $\|F(x,y,z)\|$, é ilimitado em qualquer vizinhança da origem.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 11 de Junho de 2018 - 11h30h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$(u,v) = g(x,y) = (x+y^2, x^2+y)$$
(2val.) (a) Mostre que g é localmente invertível em torno do ponto $(x,y) = (0,1)$ e calcule $\frac{\partial x}{\partial v}(1,1)$.
(0,5val.) (b) A função g é invertível? Justifique.

2. Considere o conjunto
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z - y + x^2 = 0, 0 < x < 1, 0 < x < y\}$$
(2val.) (a) Mostre que S é uma variedade e indique a sua dimensão.
(2val.) (b) Calcule o integral em S do campo escalar $\sqrt{4+8y-8z}$, $\int_S \sqrt{4+8y-8z}$

3. Seja $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por $F(x,y) = (x^2+1, y)$ e considere a curva C parametrizada por
$$g(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
(2val.) (a) Determine o trabalho realizado por F ao longo da curva C.
(2val.) (b) Sendo $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por $G(x,y) = F(x,y) + (y, -x)$ calcule o trabalho realizado por $G(x,y)$ ao longo da curva C.
(1val.) (c) Usando o Teorema de Green calcule a área da região do plano limitada pela curva C.

(3val.) 4. Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x,y,z) = (-x, x, z)$ através da superfície
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 = 1+z^2, -1 < z < 1\}$$
no sentido da normal unitária n que toma o valor $(-1,0,0)$ no ponto $(1,0,0)$.

(3val.) 5. Utilizando o Teorema de Stokes, calcule o trabalho do campo vetorial $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por
$$G(x,y,z) = (x^2 z, y, 1)$$
ao longo da curva C definida pelas equações $x^2+z^2 = 3$ e $y = x$, percorrida no sentido horário quando vista do ponto $(0,10,0)$.

(2,5val.) 6. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 tal que $\operatorname{div} F = 0$ e $\int_S F \cdot n \neq 0$ onde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^4+y^4+z^4 = 1\}$ (e n é uma normal unitária qualquer). Mostre que o campo escalar definido pelo comprimento de F, isto é $\|F(x,y,z)\|$, é ilimitado em qualquer vizinhança da origem.