Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

ÉPOCA DE RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

MEBiol, MEAmbi

1.º Sem. 2015/16 25/1/2016 Duração: 1h30m+1h30m <u>Versão B</u>

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1º TESTE

(3,0 val.) **1.** Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x-2| \leqslant \frac{5}{2}\right\}$, seja D o domínio da função $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+5}{2-x}\right)$ e seja $C = A \cap D$.

a) Identifique os conjuntos A e D e mostre que $C = \left[-\frac{1}{2}, 2\right[$.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o ínfimo de C, o máximo de C, o supremo de $C \cap \mathbb{Z}$, e o mínimo de $C \setminus \mathbb{Q}$.

c) Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

(i) Qualquer sucessão convergente de termos em C tem limite em C;

(ii) Qualquer sucessão de termos em C possui um sublimite em $C \cup \mathbb{Z}$.

(3,0 val.) **2.** Considere a sucessão (a_n) dada por

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3}, \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n+3)a_n, \quad \text{se } n \geqslant 1. \end{cases}$$

a) Use indução matemática para mostrar que $0 < a_n < 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (a_n) é uma sucessão decrescente.

c) Justifique que (a_n) é uma sucessão convergente e calcule o valor de $\lim a_n$.

(3,0 val.) **3.** Calcule, ou justifique que não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$\text{a)} \quad u_n = \sqrt[n]{\frac{n^3}{7^n+1}}\,, \qquad \text{b)} \quad v_n = \frac{(1+(-1)^n)\,n! + 2^{n+1}}{3^n + \sqrt{n}}.$$

(3,0 val.) **4.** Calcule cada um dos seguintes limites em $\overline{\mathbb{R}}$, caso exista:

$$\text{a)} \lim_{x\to-\infty} e^{x^3}\left(5\,\mathrm{sen}(x) - \cos(x)\right), \qquad \text{b)} \lim_{x\to+\infty} (1-3x)^5\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{(1-3x)^5}.$$

(6,0 val.) **5.** Considere a seguinte função f em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} - e^x\,, & \text{se } x \geqslant 0 \\ x\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Mostre que f é contínua.

b) Calcule a derivada $f'(x)$, para $x \neq 0$.

c) Calcule $f'_e(0)$ e $f'_d(0)$ e mostre que f não é diferenciável em 0.

d) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Sendo $I = [0, +\infty[$, calcule $f(I)$. Justifique detalhadamente.

e) Justifique que a restrição de f ao intervalo I considerado em d) tem função inversa e, sendo g essa função inversa, diga qual é o seu domínio e o valor de $g'\big(f(1)\big)$.

(2,0 val.) **6.** Seja $f\colon D \to \mathbb{R}$ uma função e seja $a \in D$ tal que:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{x\in]a-\varepsilon,a[\cap D}{\exists} \; f(x) \geqslant f(a)$$

Assumindo que existe a derivada à esquerda $f'_e(a)$, mostre que $f'_e(a) \leqslant 0$.

2º TESTE

(3,0 val.) **7.** Calcule os seguintes limites:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 1}\left(2x^2-4x+3\right)^{\frac{1}{\ln^2 x}}\,, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t^3)}{x^4}\,dt$$

(6,0 val.) **8.** a) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{(i)}\quad (2x-4)e^{x^2-4x+3}\,, \qquad \text{(ii)}\quad \frac{1}{x^2+x-2}\,, \qquad \text{(iii)}\quad 4x^3\cos(2x^2)\,.$$

b) Calcule o integral

$$\int_0^{\ln 4}\frac{e^{2x}}{2+e^x}\,dx\,.$$

(2,0 val.) **9.** Calcule a área da região limitada pelas parábolas $y=x^2+x-2$ e $y=4-3x-x^2$.

(2,5 val.) **10.** Seja $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável. Seja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x)=\int_{\operatorname{arctg} 3x}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Justifique que f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule f' e f''.

b) Sabendo que o polinómio de Taylor de 1ª ordem de g em torno de $x=\frac{\pi}{4}$ é $p(x)=x-\frac{\pi}{4}$, mostre que f possui um máximo relativo em $x=\frac{1}{3}$.

(4,5 val.) **11.** a) Classifique cada uma das séries seguintes em absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente:

$$\text{(i)}\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^4}{2(1+n^4)}\right)^n\,, \qquad \text{(ii)}\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{\ln n+n^2}\,.$$

b) Determine para que valores de x a seguinte série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{n+5}}\,.$$

(2,0 val.) **12.** Seja $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e seja $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$F(x)=\int_0^1 g(xt)\,\mathrm{d}t$$

Mostre que F é diferenciável e que

$$F'(x)=\int_0^1 t g'(xt)\,\mathrm{d}t$$

Sugestão: comece por fazer uma substituição.