ÉPOCA DE RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEGM, MEC, MEBiol, MEBiom

1.º Sem. 2019/20   28/1/2020   Duração: 1h30m+1h30m   Versão A

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1º TESTE

(3,0 val.) **1.** Considere os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x(3 - |x-2|) > 0\}\,, \qquad B = \left]-\infty, 5\right] \setminus A\,, \qquad C = B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\,.$$

a) Determine A na forma de intervalo ou união de intervalos e mostre que $B = \{5\} \cup [-1, 0]$.

b) Indique, ou justifique que não existem em $\mathbb{R}$, o supremo e o máximo de B e de C.

c) Considere, ainda, h uma função contínua em $\mathbb{R}$. Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Existe máximo em $\mathbb{R}$ do conjunto $h(B)$.

(ii) Se (x_n) é uma sucessão monótona de termos em B, a sucessão $(h(x_n))$ é convergente.

(2,0 val.) **2.** Prove por indução matemática que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

(6,5 val.) **3.** a) Calcule, ou justifique que não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$\text{(i)}\ \frac{(-1)^n\, n\sqrt{n^3}}{(5n^2+3)\sqrt{n+2}}\,, \qquad \text{(ii)}\ \frac{1}{n^2 \operatorname{sen}(1/n)} \cos n\,, \qquad \text{(iii)}\ \frac{n3^n + n^3}{n^2 2^n + \ln(n)}.$$

b) Calcule o seguinte limite em $\overline{\mathbb{R}}$, caso exista:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - 2e^{1-\sqrt{x}}\right)^{e^{\sqrt{x}}}.$$

(6,5 val.) **4.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} -x\,e^x, & \text{se } x < 0,\\ \alpha\ \operatorname{arctg}(x^2 - 2x), & \text{se } x \geqslant 0. \end{cases}$$

onde α é uma constante real.

a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Justifique que f é uma função contínua.

c) Sendo $f_d'(0) = -2\alpha$, determine α por forma a que f seja diferenciável em $x = 0$. Justifique então que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule a função derivada.

d) Determine os extremos locais e os intervalos de monotonia de f (com $\alpha = 1/2$).

e) Indique, justificando, o contradomínio de f (com $\alpha = 1/2$).

(2,0 val.) **5.** Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $]-\infty, a[$, e tal que $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = +\infty$. Mostre que g' não é majorada em nenhuma vizinhança de a.

2º TESTE

(6,5 val.) **6.** a) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{(i)}\ \frac{1+\cos x}{(x+\operatorname{sen} x)^7}\,, \qquad \text{(ii)}\ x^2 \operatorname{arcsen}(x^3)\,, \qquad \text{(iii)}\ \frac{3x+4}{(x-2)(x^2+2x+2)}\,.$$

b) Calcule o integral seguinte (pode ser útil fazer a substituição $t=\sqrt{2x+1}$):

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1}dx.$$

(2,5 val.) **7.** Considere a região R de $\mathbb{R}^2$ definida pelas condições:

$$y \geqslant -x^3, \quad y \leqslant x(2-x), \quad y \leqslant 2-x, \quad x \leqslant 2\,.$$

Esboce a região R e calcule a sua área.

(3,0 val.) **8.** Considere a função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(x)=\int_0^{x/2} e^{\operatorname{sen}(2t)}\,dt\,.$$

a) Determine o polinómio de Taylor p_2 de ordem 2 de F no ponto 0.

b) Use a fórmula do erro de Lagrange para mostrar que $|F(0{,}1)-p_2(0{,}1)|<10^{-3}$.

(3,0 val.) **9.** Determine a natureza de cada uma das séries seguintes (simplesmente convergente, absolutamente convergente ou divergente):

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)^2}{2n^3\sqrt{n+1}}\,, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n^3}\right)^{n^4}.$$

(3,0 val) **10.** Considere a função g definida pela série de potências:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,(x-4)^{2n}}{n\,4^{n+1}}.$$

a) Determine para que valores de x a série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

b) Justifique que g tem um extremo em 4, classificando-o.

(2,0 val.) **11.** Seja $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função monótona e seja $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ uma partição do intervalo $[a,b]$. Mostre que a diferença entre as somas superior e inferior relativas a esta partição é majorada por

$$\big|\,f(b)-f(a)\,\big|\max_{i=1,\ldots,n}(x_i-x_{i-1}).$$