

ÉPOCA DE RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEAN, LEGM, MEC, MEMat, MEQ

1.º Sem. 2016/17 30/1/2017 Duração: 1h30m+1h30m Versão A

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1.º TESTE

- (3,0 val.) **1.** Considere as funções:

$$f(x) = \sqrt{(x-5)^2(4-x^2)} \quad g(x) = \ln(3-|x-3|)$$

- a) Mostre que $D_f \cap D_g =]0, 2] \cup \{5\}$.
b) Calcule, se existirem em $\mathbb{R}$, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo de $D_f \cap D_g$.

- (2,0 val.) **2.** Prove por indução matemática que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}.$$

- (3,0 val.) **3.** Calcule, ou justifique que não existe em $\mathbb{R}$, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$\text{a) } u_n = \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{n} \right) \sin(n), \quad \text{b) } v_n = \frac{n!2^n + n^{10}}{(n! + 2^{2n})n^{10}}.$$

- (3,5 val.) **4.** Calcule cada um dos seguintes limites em $\mathbb{R}$, caso exista:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{e^{\sin^4(2\pi x)} - 1}{4 \sin^4(2\pi x)}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x - 6}{x^2 + 5x - 14}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+5)^{2/x^3}.$$

- (6,5 val.) **5.** Considere a função contínua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada, para certos valores de $a, b \in \mathbb{R}$, por

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)\left(\frac{3\pi}{2} - \arctg \frac{1}{2+x}\right), & x > -2 \\ -e^{x(x+2)} + a(x+2) + b, & x \leq -2 \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

- a) Use a definição de derivada para calcular a derivada à direita de f no ponto -2 .
b) Calcule a derivada de f para $x \neq -2$.
c) Calcule a e b de modo a f ser diferenciável no ponto -2 .
d) Justifique que f é injectiva e determine, justificando, o seu contradomínio. (Sugestão: mostre que $f'(x) > 0$, para $x \in \mathbb{R}$.)
e) Mostre que $f^{-1}(0) = -2$ e calcule $(f^{-1})'(0)$.

- (2,0 val.) **6.** Dada uma função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mostre que existe o limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(\sin x)$ se e só se existir um $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo o $x \in [-1, 1]$ temos $h(x) = c$.

2º TESTE

- (3,5 val.) **7.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $(x + 2) \cos(x + 3)$, b) $\frac{x}{(x + 1)(x^2 + 4)}$.

- (3,5 val.) **8.** Calcule os integrais, fazendo em b) a substituição indicada:

a) $\int_e^3 \frac{1}{x \ln^{4/3} x} dx$, b) $\int_0^3 \frac{1}{1 + x + \sqrt{1 + x}} dx$, $t = \sqrt{1 + x}$.

- (3,0 val.) **9.** Considere a região R do plano limitada pelas curvas $y = e^{x-2}$, $y = e^{4-x}$ e $y = e^2$.

- a) Esboce a região R e calcule a sua área.
b) Integrando em y , determine $a > 0$ de modo à área de R ser dada por

$$\int_a^{e^2} (2 + \ln y) - (4 - \ln y) dy.$$

- (2,5 val.) **10.** Seja $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \int_x^{\cos(x^2)-1} \sin\left(\frac{\pi}{t^4 - 6}\right) dt$.

- a) Calcule $f'(x)$.
b) Use a aproximação pela recta tangente para mostrar que $f(0,01) \approx 0,005$. Sabendo que $|f''(x)| \leq 8x$ para $x \in [0, 1]$, mostre que $|f(0,01) - 0,005| \leq 4 \cdot 10^{-6}$.

- (3,0 val.) **11.** Classifique cada uma das séries seguintes em absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente e determine a soma de uma delas:

a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right)$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^{n-1}}{2^n (n+5)!}$.

- (2,5 val.) **12.** Considere a série de potências:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^{n+3}}{4^{n+1}(n+\sqrt{n})}.$$

- a) Mostre que a série é simplesmente convergente em $x = -1$.
b) Determine o raio de convergência da série (sugestão: pode utilizar a alínea a)) e indique em que pontos a série é absolutamente convergente e divergente.

- (2,0 val.) **13.** Seja $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função tal que $g(x) = 1$ se x pertence a qualquer um dos intervalos $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$, com n inteiro positivo ímpar, e $g(x) = 0$ nos outros pontos de $[0, 1]$. Esboce o gráfico de g e mostre que g é integrável em $[0, 1]$ com integral

$$\int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{2}{3}.$$