TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão B) 6 de Janeiro de 2020

LEGM, MEC

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0 val.) **I.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)}\ \frac{4x^3}{1+x^8}\,, \qquad \text{b)}\ \frac{x-4}{(x-3)^2}\,.$$

Resolução:

a) $\displaystyle\int \frac{4x^3}{1+x^8}\,dx = \int \frac{(x^4)'}{1+(x^4)^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x^4).$

b) Decomposição em fracções simples:

$$\frac{x-4}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}\,.$$

A seguinte igualdade entre polinómios tem então que ser satisfeita:

$$A(x-3) + B = x - 4\,.$$

Igualando os coeficientes que multiplicam iguais potências de x em ambos os membros, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} A = 1 \\ -3A + B = -4\,, \end{cases}$$

cuja solução é $A = 1$, $B = -1$. Logo,

$$\int \frac{x-4}{(x-3)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^2}\right) dx = \ln|x-3| + \frac{1}{x-3}\,.$$

(4,0 val.) **II.** Calcule os integrais seguintes (em b) pode ser útil uma das primitivas calculadas atrás):

$$\text{a)}\ \int_{-1}^{e-2} (2+x)^4 \ln(2+x)\,dx, \qquad \text{b)}\ \int_{\ln 4}^{\ln 5} \frac{e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 6e^x + 9}\,dx.$$

Resolução:

a) Integrando por partes:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{e-2} (2+x)^4 \ln(2+x)\,dx &= \left[\frac{(2+x)^5}{5}\ln(2+x)\right]_{-1}^{e-2} - \int_{-1}^{e-2} \frac{(2+x)^5}{5}\,\frac{1}{2+x}\,dx \\
&= \frac{e^5}{5} - \frac{1}{5}\int_{-1}^{e-2} (2+x)^4\,dx = \frac{e^5}{5} - \frac{1}{5}\left[\frac{(2+x)^5}{5}\right]_{-1}^{e-2} \\
&= \frac{e^5}{5} - \left(\frac{e^5}{25} - \frac{1}{25}\right) = \frac{4e^5+1}{25}\,.
\end{aligned}$$

b) Fazendo a substituição $t = e^x$, temos $x = \ln t$ e, portanto, $x' = \frac{1}{t}$. Além disso,

$$x = \ln 4 \quad \Rightarrow \quad t = 4,$$
$$x = \ln 5 \quad \Rightarrow \quad t = 5\,.$$

Substituindo na fórmula de substituição de variável,

$$\int_{\ln 4}^{\ln 5} \frac{e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 6e^x + 9}\, dx = \int_4^5 \frac{t^2 - 4t}{t^2 - 6t + 9} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int_4^5 \frac{t-4}{(t-3)^2}\, dt$$
$$= \left[\ln|t-3| + \frac{1}{t-3}\right]_4^5 = \ln 2 + \frac{1}{2} - \ln 1 - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2}\,,$$

onde se usou a primitiva calculada em I.b).

(3,0 val.) **III.** Calcule a área do conjunto de pares ordenados (x, y) definido pela conjunção das seguintes condições:

$$x \geqslant 0\,, \qquad y \leqslant x^6 - \sqrt{x}\,, \qquad y \geqslant x^6 - 1.$$

Resolução:
Calculemos os pontos de intersecção entre as curvas $y = x^6 - \sqrt{x}$ e $y = x^6 - 1$, com abcissa $x > 0$:

$$x^6 - \sqrt{x} = x^6 - 1 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 1.$$

Dado que, para $x \in [0, 1[$, $x^6 - \sqrt{x} > x^6 - 1$, sendo válida a desigualdade oposta para $x > 1$, concluimos que a área pedida será dada por

$$\int_0^1 ((x^6 - \sqrt{x}) - (x^6 - 1)), dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x}), dx = \left[x - \frac{2x^{3/2}}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

(3,5 val.) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada, para cada $x \in \mathbb{R}$, por,

$$f(x) = \int_{\pi^3+3}^{x^3+3} \cos\left(\sqrt[3]{t-3}\right)\, dt\,.$$

a) Calcule $f'(x)$, para cada real x.

Resolução:
a) Dado que a função integranda é contínua, para $t \in \mathbb{R}$, e os extremos de integração são funções diferenciáveis podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema da derivada da função composta para escrevermos, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \cos\left(\sqrt[3]{(x^3+3) - 3}\right)(x^3+3)' = 3x^2 \cos x\,.$$

b) Determine o polinómio de Taylor de ordem 3 em torno de $a = \pi$. Diga, justificando, se f tem extremo local em π.

Resolução:

b) Calculemos os coeficientes do polinómio de Taylor $p_3(x)$ pedido: Como, $f(\pi) = \int_{\pi^3+3}^{\pi^3+3} \cos\left(\sqrt[3]{t-3}\right)\, dt = 0$, $f'(\pi) = 3\pi^2 \cos\pi = -3\pi^2$, e além disso,

$$f''(x) = (3x^2\cos x)' = 6x\cos x - 3x^2 \operatorname{sen} x \Rightarrow f''(\pi) = -6\pi\,,$$
$$f'''(x) = 6\cos x - 6x \operatorname{sen} x - 6x \operatorname{sen} x - 3x^2 \cos x \Rightarrow f'''(\pi) = -6 + 3\pi^2\,,$$

temos que,

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 \\ &= -3\pi^2(x-\pi) - 3\pi(x-\pi)^2 + \left(\frac{\pi^2}{2} - 1\right)(x-\pi)^3\,. \end{aligned}$$

Dado que f é diferenciável em $x = \pi$ e $f'(\pi) \neq 0$, concluimos que f não tem extremo local em π.

(4,5 val.) **V.** 1. Classifique cada uma das seguintes séries como divergente ou convergente. Calcule a soma de uma delas.

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}}\,, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!}\,.$$

Resolução:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}} = \frac{2}{5^{-2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{50}{1-\frac{4}{5}} = 250$, onde se usou o facto da segunda série ser geométrica do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ com $|r| < 1$ e, portanto, ser convergente com soma $\frac{1}{1-r}$. Logo, a série é convergente com soma 250.

b) Trata-se de uma série de termos positivos à qual vamos tentar aplicar o critério de d'Alembert. Designando po a_n o termo geral da série,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2} = \frac{5(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \longrightarrow \frac{5}{4}\,.$$

Como $\frac{5}{4} > 1$, concluimos que a série é divergente.

2. Diga para que valores de x a seguinte série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} x^n}{\sqrt{n}}\,.$$

Resolução:
Trata-se de uma série de potências do tipo $\sum c_n(x-a)^n$ com $a = 0$ e $c_n = \frac{2^{-n}}{\sqrt{n}}$.
Calculemos o raio de convergência da série R:

$$R = \lim \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim \frac{2^{-n}\sqrt{n+1}}{2^{-n-1}\sqrt{n}} = 2 \lim \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 2\,.$$

Podemos desde já dizer que:

- se $|x| < 2$, ou seja, se $x \in \left]-2, 2\right[$, a série é absolutamente convergente;
- se $|x| > 2$, ou seja, se $x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$, a série é divergente.

Vejamos nos extremos do intervalo de convergência, -2 e 2:

- se $x = 2$, a série reduz-se a $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ que é a série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, com $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, logo, é divergente.
- se $x = -2$, a série reduz-se a $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, cuja série dos módulos é $\sum \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ a qual vimos atrás ser divergente. Logo, em $x = -2$ a série de potências não é absolutamente convergente. Por outro lado, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum (-1)^n a_n$, com $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Como $a_n > 0$, a sucessão (a_n) é decrescente e $\lim a_n = 0$, concluimos, pelo critério de Leibniz, que a série é convergente. Concluimos assim, que em $x = -2$, a série de potências é simplesmente convergente.

(2,0 val.) **VI.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, e considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por,

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt\,.$$

Suponha que existe $M > 0$ tal que, para todo o real x, $0 \leqslant F(x) \leqslant M$. Mostre que o limite seguinte existe e satisfaz a desigualdade indicada,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \leqslant M\,.$$

(Sugestão: comece por efetuar uma integração por partes.)

Começemos por constatar que, como f é contínua, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a função F é uma primitiva da função f, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}$, $F'(s) = f(x)$.
Por integração por partes, temos então, para $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} \cdot F'(t) dt = \left[\frac{1}{t} \cdot F(t)\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{t^2}\right) F(t) dt$$
$$= \frac{F(x)}{x} + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2} dt\,,$$

onde também usámos o facto de $F(1) = 0$, que resulta da definição de $F(x)$. Usando a majoração $F(x) \leqslant M$, obtemos, para $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x \frac{F(t)}{t^2} dt \leqslant \int_1^x \frac{M}{t^2}\, dt = \left[-\frac{M}{t}\right]_1^x = M - \frac{M}{x} \leqslant M.$$

Como $\frac{F(t)}{t^2} \geqslant 0$, o integral $\int_1^x \frac{F(t)}{t^2} dt$ é crescente com x, e como vimos que é majorado, concluimos que existe o limite deste quando $x \to +\infty$. Por outro lado, por enquadramento, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = 0$. Logo, o limite pedido existe e é,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{F(t)}{t^2} dt \leqslant M\,.$$