TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão B) 6 de Janeiro de 2020

LEGM, MEC

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0 val.) **I.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)}\ \frac{4x^3}{1+x^8}\,, \qquad \text{b)}\ \frac{x-4}{(x-3)^2}\,.$$

(4,0 val.) **II.** Calcule os integrais seguintes (em b) pode ser útil uma das primitivas calculadas atrás):

$$\text{a)}\ \int_{-1}^{e-2} (2+x)^4 \ln(2+x)\,dx, \qquad \text{b)}\ \int_{\ln 4}^{\ln 5} \frac{e^{2x}-4e^x}{e^{2x}-6e^x+9}\,dx.$$

(3,0 val.) **III.** Calcule a área do conjunto de pares ordenados (x,y) definido pela conjunção das seguintes condições:

$$x \geqslant 0\,, \qquad y \leqslant x^6-\sqrt{x}\,, \qquad y \geqslant x^6-1.$$

(3,5 val.) **IV.** Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada, para cada $x\in\mathbb{R}$, por,

$$f(x) = \int_{\pi^3+3}^{x^3+3} \cos\left(\sqrt[3]{t-3}\right)\,dt\,.$$

a) Calcule $f'(x)$, para cada real x.

b) Determine o polinómio de Taylor de ordem 3 em torno de $a=\pi$. Diga, justificando, se f tem extremo local em π.

(4,5 val.) **V.** 1. Classifique cada uma das seguintes séries como divergente ou convergente. Calcule a soma de uma delas.

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}}\,, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!}\,.$$

2. Diga para que valores de x a seguinte série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}x^n}{\sqrt{n}}\,.$$

(2,0 val.) **VI.** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua, e considere a função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por,

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt\,.$$

Suponha que existe $M>0$ tal que, para todo o real x, $0\leqslant F(x)\leqslant M$. Mostre que o limite seguinte existe e satisfaz a desigualdade indicada,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt \leqslant M\,.$$

(Sugestão: comece por efetuar uma integração por partes.)