Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão B)   5 de Janeiro de 2015

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores - Alameda

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(1,5) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1+} (\ln x)^{(x-1)}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1}\int_0^{\ln(2+x)} e^{\operatorname{tg} t}\, dt$.

(2,0) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{2\cos x}{4+\operatorname{sen}^2 x}$, b) $x^2 \ln\sqrt{x}$, c) $\dfrac{e^x}{e^{2x}-1}$.

(1,5) **III.** Calcule a área da região do plano limitada pelas parábolas de equações $x = y^2$ e $x^2 = -y$.

(1,7) **IV.** Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função tal que $f(e) = 0$ e que tem em $x = e$ um extremo local. Seja $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \int_{\log x}^{e^x} f(y)\, dy\,.$$

Calcule ϕ' e ϕ'' e mostre que $\phi'(1) + \phi''(1) = -f'(0)$.

(1,8) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n^2}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^5+1}$, *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!+n^{10}}$.

(1,5) **VI.** a) Sendo $\varphi \in C(\mathbb{R})$ e ϕ o seu integral indefinido com origem no ponto 2, mostre que

$$\max_{t\in I} |\phi(t)| \leq 3 \max_{t\in I} |\varphi(t)|$$

onde $I = [2, 5]$.

b) Aplicando a Regra de Barrow prove que, sendo $g \in C(\mathbb{R})$ e $a, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\int_c^d g(u)\, du = \int_{a-d}^{a-c} g(a-u)\, du\ .$$