Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A) 6 de Janeiro de 2020

LEGM, MEC

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0 val.) **I.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,, \qquad \text{b) } \frac{x+3}{(x+4)^2}\,.$$

(4,0 val.) **II.** Calcule os integrais seguintes (em b) pode ser útil uma das primitivas calculadas atrás):

$$\text{a) } \int_6^{e+5} (x-5)^3 \ln(x-5)\,dx, \qquad \text{b) } \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+8e^x+16}\,dx.$$

(3,0 val.) **III.** Calcule a área do conjunto de pares ordenados (x, y) definido pela conjunção das seguintes condições:

$$x \geqslant 0\,, \qquad y \geqslant x^4+\sqrt{x}-1\,, \qquad y \leqslant x^4.$$

(3,5 val.) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada, para cada $x \in \mathbb{R}$, por,

$$f(x) = \int_{\pi^2+2}^{x^2+2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{t-2}\right)\, dt\,.$$

a) Calcule $f'(x)$, para cada real positivo x.

b) Determine o polinómio de Taylor de ordem 3 em torno de $a = \pi$. Diga, justificando, se f tem extremo local em π.

(4,5 val.) **V.** 1. Classifique cada uma das seguintes séries como divergente ou convergente. Calcule a soma de uma delas.

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n-2}}\,, \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n (n!)^2}\,.$$

2. Diga para que valores de x a seguinte série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt[3]{n}}\,.$$

(2,0 val.) **VI.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, e considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por,

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt\,.$$

Suponha que existe $M > 0$ tal que, para todo o real x, $0 \leqslant F(x) \leqslant M$. Mostre que o limite seguinte existe e satisfaz a desigualdade indicada,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt \leqslant M\,.$$

(Sugestão: comece por efetuar uma integração por partes.)