Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A) 5 de Janeiro de 2015

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores-Alameda

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to+\infty} (\log x)^{\frac{1}{2x}}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0+} \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{x}, \qquad \text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^{2\log(x+1)} e^{\cos t}\,dt.$$

(4,0) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{e^x}{e^{2x}+4}, \qquad \text{b) } \frac{\log(2x)}{\sqrt{2x}}, \qquad \text{c) } \frac{\log x}{x\,(\log x+1)}.$$

(3,0) **III.** Calcule a área da região do plano limitada pelas parábolas de equações $y = x^2$ e $x = -y^2$.

(3,5) **IV.** Sejam $h \in C^1(\mathbb{R})$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \int_x^{x^3} h(t)\,dt.$$

Supondo $h(0) = 0$ e $h'(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, mostre que φ tem um extremo local em $x = 0$. Será um ponto de máximo ou mínimo? Justifique.

(3,5) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2}, \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2+1}, \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n^2+n!}.$$

(3,0) **VI.** a) Aplicando a Regra de Barrow prove que, sendo $f \in C(\mathbb{R})$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\int_{c-b}^{c-a} f(c-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\ .$$

b) Sendo $g \in C(\mathbb{R})$ e G o seu integral indefinido com origem no ponto 1, mostre que

$$\max_{x\in I} |G(x)| \leq 2 \max_{x\in I} |g(x)|$$

onde $I = [1, 3]$.

Resolução

I. a) Como $(\log x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{\log(\log x)}{2x}}$ começamos por considerar, usando regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log x)}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x\log x} = 0$$

pelo que

$$\lim_{x\to+\infty} (\log x)^{\frac{1}{2x}} = e^0 = 1.$$

b)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{x} = +\infty.$$

c) Usando regra de Cauchy, teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^{2\log(x+1)} e^{\cos t}\,dt = \lim_{x\to 0} \frac{2}{(x+1)} e^{\cos(2\log(x+1))} = 2e.$$

II. a)

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^x}{2}\right).$$

b) Primitivando por partes

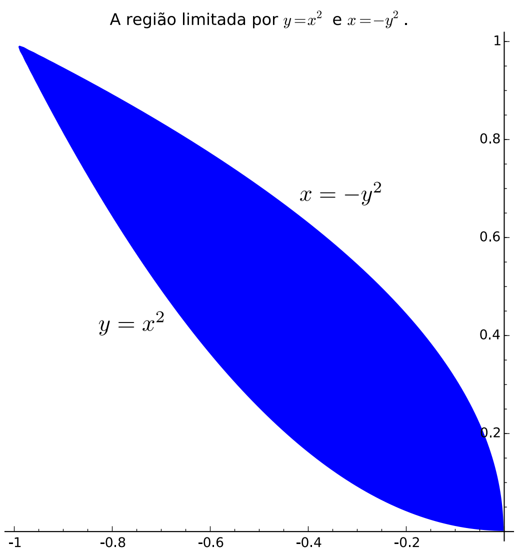
$$\int \frac{\log(2x)}{\sqrt{2x}}\,dx = \sqrt{2x}\log(2x) - \int \frac{1}{x}\sqrt{2x}\,dx = \sqrt{2x}\log(2x) - 2\int \frac{1}{\sqrt{2x}}\,dx = \sqrt{2x}\,(\log(2x)-2).$$

c) Usando a substituição $\log x = t$ obtém-se

$$\int \frac{\log x}{x(\log x+1)}\,dx = \int \frac{t}{e^t(t+1)}e^t\,dt = \int \frac{t}{(t+1)}\,dt$$
$$= \int 1 - \frac{1}{t+1}\,dt = t - \log|t+1| = \log x - \log|\log x + 1|.$$

III.

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{-x} - x^2\,dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$



IV. Usando o teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta,

$$\varphi'(x) = 3x^2 h(x^3) - h(x)$$
$$\varphi''(x) = 6xh(x^3) + 9x^4 h'(x^3) - h'(x)$$

donde

$$\varphi'(0) = -h(0) = 0$$
$$\varphi''(x) = -h'(0) < 0$$

e portanto 0 é um ponto de máximo local de φ.

V. a) Como

$$\lim \frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}/(n+2)} = 1$$

a série tem a mesma natureza de $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ e portanto é divergente.

b) Como

$$0 \leq \frac{1+(-1)^n}{n^2+1} \leq \frac{2}{n^2}$$

e a série $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente podemos concluir que a série é (absolutamente) convergente.

c) Como

$$\lim \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)^2+(n+1)!}}{\frac{e^n}{(n)^2+n!}} = 0 < 1$$

concluímos que a série é absolutamente convergente.

VI. a) Como f é uma função contínua, é primitivável. Seja $F(x)$ uma sua primitiva. Então $-F(c-x)$ é primitiva de $f(c-x)$ e, usando duas vezes a Regra de Barrow,

$$\int_{c-b}^{c-a} f(c-x)\,dx = -F(c-x)|_{c-b}^{c-a} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\ .$$

b) Antes do mais note-se que ambos os máximos existem por aplicação do teorema de Weierstrass a $|g|$, que é contínua em $[1,3]$, e a $|G|$, que também é contínua (por continuidade do integral indefinido e do módulo). Adicionalmente, usando a monotonia do integral, tem-se, para qualquer $x \in I = [1,3]$,

$$|G(x)| = \left|\int_1^x g(t)\,dt\right| \leq \int_1^x |g(t)|\,dt \leq \int_1^x \max_{x\in I} |g(x)|\,dt \leq (x-1)\max_{x\in I}|g(x)|\,.$$

Assim,

$$\max_{x\in I}|G(x)| \leq 2\max_{x\in I}|g(x)|\,.$$