Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A)   5 de Janeiro de 2015

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores - Alameda

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(1,5) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{2x}}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0+}\frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{x}, \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^{2\ln(x+1)} e^{\cos t}\,dt.$$

(2,0) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)}\ \frac{e^x}{e^{2x}+4}, \qquad \text{b)}\ \frac{\ln(2x)}{\sqrt{2x}}, \qquad \text{c)}\ \frac{\ln x}{x\,(\ln x+1)}.$$

(1,5) **III.** Calcule a área da região do plano limitada pelas parábolas de equações $y=x^2$ e $x=-y^2$.

(1,7) **IV.** Sejam $h\in C^1(\mathbb{R})$ e $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x)=\int_x^{x^3} h(t)\,dt.$$

Supondo $h(0)=0$ e $h'(x)>0$ para qualquer $x\in\mathbb{R}$, mostre que φ tem um extremo local em $x=0$. Será um ponto de máximo ou mínimo? Justifique.

(1,8) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2}, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2+1}, \qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^n}{n^2+n!}.$$

(1,5) **VI.** a) Aplicando a Regra de Barrow prove que, sendo $f\in C(\mathbb{R})$ e $a,b,c\in\mathbb{R}$,

$$\int_{c-b}^{c-a} f(c-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\ .$$

b) Sendo $g\in C(\mathbb{R})$ e G o seu integral indefinido com origem no ponto 1, mostre que

$$\max_{x\in I}|G(x)|\le 2\max_{x\in I}|g(x)|$$

onde $I=[1,3]$.