Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão B) 9 de Novembro de 2019

LEGM, MEC

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas pelas expressões

$$f(x) = \sqrt[4]{|x|(1-|x+3|)}\,, \qquad g(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x^2-4}{5}\right)\,,$$

e considere o conjunto $A = D_f \cap D_g$.

a) Mostre que $A = [-3,-2] \cup \{0\}$.

Resolução:
Como o domínio da função raiz quarta é $[0,+\infty[$, temos, considerando o facto de que $|x| \geqslant 0$, que $x \in D_f$ sse,

$$|x| = 0 \ \vee \ 1-|x+3| \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ |x+3| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ -1 \leqslant x+3 \leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ -4 \leqslant x \leqslant -2\,,$$

e,portanto,

$$D_f = [-4,-2] \cup \{0\}.$$

Como o domínio da função arcsen é $[-1,1]$, temos que $x \in D_g$ sse,

$$-1 \leqslant \frac{x^2-4}{5} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \leqslant x^2-4 \leqslant 5 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x^2 \leqslant 9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant 9\,,$$

dado que a desigualdade $-1 \leqslant x^2$ é universal. Podemos então concluir que,

$$D_g = [-3,3]\,.$$

Conclui-se então que

$$A = ([-4,-2] \cup \{0\}) \cap [-3,3] = [-3,-2] \cup \{0\}\,.$$

b) Determine quando existam ou justifique que não existem, o ínfimo, supremo, mínimo e máxi)mo de A e $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Resolução:
Uma vez que o conjunto dos minorantes de A é $]-\infty,-3]$ e o dos majorantes é $[0,+\infty[$, temos que, $\inf A = -3$, $\sup A = 0$, $\min A = -3$, $\max A = 0$.
Como o conjunto dos minorantes de $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ é $]-\infty,-3]$ e dos majorantes é $[-2,+\infty[$, podemos concluir que $\inf(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = -3$ e $\sup(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = -2$. Já $\max(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$ e $\min(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$ não existem porque, uma vez que $-3 \in \mathbb{Q}$ e $-2 \in \mathbb{Q}$, deduz-se que $\inf(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \notin A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ e $\sup(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \notin A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

(2,5) **II.** Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência por

$$\begin{cases} u_1 = 1\,, \\ u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Prove, usando o método de indução matemática, que, $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n \leqslant \dfrac{(n+1)^2}{4}\,.$

Resolução:

Pretende-se provar que, para qualquer número natural n, é verdadeira a proposição $P(n)$ que consiste na desigualdade $u_n \leqslant \frac{(n+1)^2}{4}$.

Para $n = 1$, tem-se $u_1 \leqslant \dfrac{4}{4} \Leftrightarrow 1 \leqslant 1$, que se trata de uma proposição verdadeira, ficando provada a veracidade de $P(1)$.

Admitamos agora que, para algum $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \frac{(n+1)^2}{4}$ (hipótese de indução $P(n)$). Mostremos que isso implica que $u_{n+1} \leqslant \frac{(n+2)^2}{4}$ (tese de indução):

$$u_n \leqslant \frac{(n+1)^2}{4} \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n} \leqslant \frac{(n+1)^2}{4} + \frac{n+1}{2} = \frac{n^2+4n+3}{4} \leqslant \frac{n^2+4n+4}{4} = \frac{(n+2)^2}{4},$$

como se pretendia provar.

(3,5) **III.** Calcule, caso exista, ou justifique porque não existe o limite em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada uma das seguintes sucessões:

$$\text{a)} \quad u_n = \frac{2^n + 5n! + \ln n}{(-n)^n + n^2}, \qquad \text{b)} \quad v_n = \frac{n\cos(n^3)}{\sqrt{n^3+1}}, \qquad \text{c)} \quad z_n = \frac{n^n(3n)!}{(n!)^4}.$$

Resolução:

a)
$$u_n = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{\frac{2^n}{n!} + 5 + \frac{\ln n}{n!}}{(-1)^n + \frac{n^2}{n^n}}.$$

Pela escala de sucessões,

$$\frac{n!}{n^n} \to 0, \qquad \frac{2^n}{n!} \to 0, \qquad \frac{\ln n}{n!} \to 0, \qquad \frac{n^2}{n^n} \to 0.$$

Assim, tomando a subsucessão correspondente às ordens n pares, teremos,

$$u_n = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{\frac{2^n}{n!} + 5 + \frac{\ln n}{n!}}{1 + \frac{n^2}{n^n}} \quad \to \quad 0 \cdot 5 = 0,$$

enquanto que, tomando a subsucessão correspondente às ordens n ímpares, teremos,

$$u_n = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{\frac{2^n}{n!} + 5 + \frac{\ln n}{n!}}{-1 + \frac{n^2}{n^n}} \quad \to \quad 0 \cdot (-5) = 0.$$

Uma vez que estes sublimites de (u_n) existem em $\overline{\mathbb{R}}$ e são iguais, conclui-se que (u_n) é convergente e $\lim u_n = 0$.

b) Dado que $-1 \leqslant \cos(n^3) \leqslant 1$, temos o enquadramento,

$$-\frac{n}{\sqrt{n^3+1}} \leqslant v_n \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}.$$

Como,

$$\frac{n}{\sqrt{n^3+1}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^3+1}} = \sqrt{\frac{1}{n+\frac{1}{n^2}}} \quad \to \quad \frac{1}{+\infty} = 0,$$

conclui-se que (v_n) está enquadrada por duas sucessões que tendem para 0 e, logo,

$$v_n \to 0.$$

c) A sucessão (z_n) é o quociente de duas sucessões estritamente positivas. Calculemos $\lim \frac{z_{n+1}}{z_n}$ (se existir):

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(n+1)^{(n+1)}(3(n+1))!}{((n+1)!)^4} \cdot \frac{(n!)^4}{n^n(3n)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)^3}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{(3+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{3}{n})}{(1+\frac{1}{n})^3} \quad \to \quad e\cdot 27 > 1\,.$$

Conclui-se então que $z_n \to +\infty$.

(2,5) **IV.** a) Calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(3x)\right)^{-x}$$

Resolução:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(3x)\right)^{-x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(3x)\right)}.$$

No lado esquerdo temos uma indeterminação do tipo 1^∞ enquanto que no lado direito temos uma do tipo $\infty.0$ transformável numa do tipo $\frac{0}{0}$ à qual, para a resolver, aplicaremos a regra de Cauchy:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(-x)\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(3x)\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(3x)\right)}{-\frac{1}{x}} \overset{RC}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(3x)\right)\right)'}{\left(-\frac{1}{x}\right)'}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}(3x)}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}(3x)}\\
&= \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{2}{3\pi}\,.
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(3x)\right)^{-x} = e^{\frac{2}{3\pi}}\,.$$

b) Seja (u_n) uma sucessão tal que $u_n \geqslant n$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Justifique porque a sucessão seguinte é convergente e diga qual é o seu limite:

$$\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(3u_n)\right)^{-u_n}.$$

Resolução:
Sabemos que $\forall n,\ u_n \geqslant n$ implica $u_n \to +\infty$. Seja $f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(3x)\right)^{-x}$. Pela definição de limite à Heine e pelo resultado da alínea a) concluimos que $f(u_n)$ é convergente e $f(u_n)\to e^{\frac{2}{3\pi}}$, que é o limite pretendido.

(6,5) **V.** Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases}(x+1)e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}, & \text{se } x<-1,\\ x^8+4x^2-5, & \text{se } x\geqslant -1.\end{cases}$$

a) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Resolução:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{-\frac{1}{(x+1)^2}} = -\infty\cdot e^0 = -\infty\cdot 1 = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^8+4x^2-5) = \lim_{x\to+\infty} x^8\left(1+\frac{4}{x^6}-\frac{5}{x^8}\right) = +\infty\cdot 1 = +\infty\,.$$

b) Estude a continuidade de f no ponto $x=-1$.

Resolução:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x+1)e^{-\frac{1}{(x+1)^2}} = 0\cdot e^{-\infty} = 0\cdot 0 = 0$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = (-1)^8 + 4\cdot(-1)^2 - 5 = 0\,.$$

Dado que $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ concluimos que f é contínua no ponto $x=-1$.

c) Determine, justificando, o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a função derivada.

Resolução:
Calculemos as derivadas laterais no ponto $x = 1$:

$$f'_e(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x+1)e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} e^{-\frac{1}{(x+1)^2}} = e^{-\infty} = 0\,,$$
$$f'_d(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^8+4x^2-5}{x+1} \overset{RC}{=} \lim_{x\to -1^+} \frac{8x^7+8x}{1} = -16\,.$$

Dado que $f'_e(-1) \neq f'_d(-1)$ concluimos que f não é diferenciável em $x=-1$.
Como, para x no intervalo aberto $]-\infty,-1[$, $f(x)$ coincide com o produto de uma função polinomial com a composta da exponencial com uma função racional, todas funções diferenciáveis nos seus domínios, concluimos que, neste intervalo aberto f é diferenciável.
Como, para x no intervalo aberto $]-1,+\infty[$, $f(x)$ coincide com uma função polinomial, conclui-se que neste intervalo f é diferenciável. Logo, o domínio de diferenciabilidade de f será

$$D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}\,,$$

e

$$f'(x) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{2}{(x+1)^2}\right)e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}, & \text{se } x<-1\,,\\ 8x^7+8x\,, & \text{se } x>-1\,. \end{cases}$$

d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f. Terá f extremos absolutos?

Resolução:
Procuremos os zeros de $f'(x)$:
Para $x<-1$, $f'(x)$ é estritamente positiva e, portanto, não tem zeros.
Para $x>-1$, $f'(x) = 8x(x^6+1)$ e, portanto, $f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0$.
Tem-se então:
Em $]-\infty,-1[$, $f'>0$ e, logo, f é estritamente crescente.
Em $]-1,0[$, $f'<0$ e, logo, f é estritamente decrescente.
Em $]0,+\infty[$, $f'>0$ e, logo, f é estritamente crescente.
Quanto aos extremos locais, podemos afirmar que f tem um máximo local em $x=-1$, $f(-1)=0$, e tem um mínimo local em $x=0$, $f(0)=-5$. Tendo em atenção os limites quando $x\to-\infty$ e quando $x\to+\infty$, concluimos que f não tem extremos absolutos.

e) Diga, justificando, o número exacto de zeros da função f.

Resolução:

Em $]-\infty,-1[$, f é estritamente positiva. Como $f(-1)=0$ e, em $[0,1]$, f é estritamente decrescente, concluimos que, em $]0,1]$, f não tem zeros. Como em $]0,+\infty[$, f' não tem zeros, como consequência do teorema de Rolle, f não pode ter mais do que um zero neste intervalo. Mas como $f(0)=-5<0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, como consequência do teorema de Bolzano, existe pelo menos um zero neste intervalo. Concluimos que, em $]0,+\infty[$ existe exactamente um zero de f.

Logo, f tem exatamente dois zeros.

(2,0) **VI.** Considere uma função contínua $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$\forall x\in\mathbb{R}, \quad g(x)>x^4 .$$

Mostre que existe $a\geqslant 0$, tal que $[a,+\infty[$ é o contradomínio de g.

Resolução:

Como g é contínua em $\mathbb{R}$, como consequência do Teorema de Bolzano, g transforma intervalos em intervalos e, logo, $g(\mathbb{R})$ é um intervalo.

Por outro lado, dado $M>0$ arbitrariamente grande, se $|x|>\sqrt[4]{M}$ então, por hipótese, $g(x)>x^4>M$. Concluimos assim que $g(\mathbb{R})$ não é majorado.

Para provar que existe $c=\min g(\mathbb{R})$, escolha-se, para a constante considerada no parágrafo anterior, o valor $M=g(0)$. Como g é contínua em $\mathbb{R}$, podemos aplicar o Teorema de Weierstrass ao intervalo fechado e limitado $[-\sqrt[4]{M},\sqrt[4]{M}]$, concluindo que existe $a\in[-\sqrt[4]{M},\sqrt[4]{M}]$ tal que $c=g(a)=\min g([-\sqrt[4]{M},\sqrt[4]{M}])$. Como $g(a)>a^4$ temos que $c\geqslant 0$. Mas, se $|x|>\sqrt[4]{M}$, vimos que $g(x)>M=g(0)$ e, por definição de mínimo, $g(0)\geqslant c$. Logo, para $x\in\mathbb{R}\setminus[-\sqrt[4]{M},\sqrt[4]{M}]$, $g(x)\geqslant c$. Provámos assim que

$$c=\min g(\mathbb{R}).$$

Conclusão: $g(\mathbb{R})$ é um intervalo não majorado com mínimo c, logo, é $[c,+\infty[$.