TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão B) 9 de Novembro de 2019

LEGM, MEC

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas pelas expressões

$$f(x) = \sqrt[4]{|x|(1 - |x+3|)}\,, \qquad g(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x^2-4}{5}\right)\,,$$

e considere o conjunto $A = D_f \cap D_g$.

a) Mostre que $A = [-3,-2] \cup \{0\}$.

b) Determine quando existam ou justifique que não existem, o ínfimo, supremo, mínimo e máxi)mo de A e $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

(2,5) **II.** Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência por

$$\begin{cases} u_1 = 1\,, \\ u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Prove, usando o método de indução matemática, que, $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n \leqslant \dfrac{(n+1)^2}{4}$.

(3,5) **III.** Calcule, caso exista, ou justifique porque não existe o limite em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada uma das seguintes sucessões:

$$\text{a)}\quad u_n = \frac{2^n + 5n! + \ln n}{(-n)^n + n^2}\,, \qquad \text{b)}\quad v_n = \frac{n\cos(n^3)}{\sqrt{n^3+1}}\,, \qquad \text{c)}\quad z_n = \frac{n^n(3n)!}{(n!)^4}\,.$$

(2,5) **IV.** a) Calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(3x)\right)^{-x}$$

b) Seja (u_n) uma sucessão tal que $u_n \geqslant n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Justifique porque a sucessão seguinte é convergente e diga qual é o seu limite:

$$\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(3u_n)\right)^{-u_n}\,.$$

(6,5) **V.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}\,, & \text{se } x < -1, \\ x^8 + 4x^2 - 5, & \text{se } x \geqslant -1. \end{cases}$$

a) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Estude a continuidade de f no ponto $x = -1$.

c) Determine, justificando, o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a função derivada.

d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f. Terá f extremos absolutos?

e) Diga, justificando, o número exacto de zeros da função f.

(2,0) **VI.** Considere uma função contínua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad g(x) > x^4\,.$$

Mostre que existe $a \geqslant 0$, tal que $[a, +\infty[$ é o contradomínio de g.