TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão B) 8 de Novembro de 2014

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores - Alameda

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,0) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| \geqslant 4\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{1-e^x} \leqslant 0\right\}, \qquad C = (A \cap B).$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C = [\,7, +\infty[\,.$$

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\min C$, $\inf\,(C \cap \mathbb{Q})$ e $\min\,(C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão crescente de termos em C tem limite (em $\mathbb{R}$).

(ii) Qualquer sucessão decrescente de termos em C tem limite em C.

(iii) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite em $\mathbb{R}$.

(1,5) **II.** Por indução, mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 2$,

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \quad .$$

(2,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim \sqrt{\frac{6n^3+2}{5+3n^4}} \qquad \text{b) } \lim \frac{5^n+2}{3+n^n} \qquad \text{c) } \lim \sqrt[n]{\frac{n!}{e^n+n}}$$

$$\text{d) } \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{x^2+1} \qquad \text{e) } \lim_{x \to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}}$$

(3,0) **IV.** Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}((x+1)^2), & \text{se } x < 0. \\ \ln(\ln(x+1)), & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

a) Estude g quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

c) Será g prolongável por continuidade ao ponto 0? Justifique.

d) Calcule a função derivada g'.

(1,0) **V.** Seja f uma função contínua em $I = [0, +\infty[$ tal que

$$f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Mostre que a função dada por $g(x) = \max f([0, x])$ está definida para todo $x \in I$ e que existe $L \geqslant 0$ tal que g é constante no intervalo $[L, +\infty[$.